

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SIMULATION D'ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE ENTRE UN LIQUIDE ET UN  
GAZ COMPRESSIBLE

SÉBASTIEN LORTIE  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
AOÛT 2018

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

SIMULATION D'ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE ENTRE UN LIQUIDE ET UN  
GAZ COMPRESSIBLE

présenté par : LORTIE Sébastien

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. TRÉPANIÉ Jean-Yves, Ph. D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. VÉTEL Jérôme, Doctorat, membre

## DÉDICACE

*À ma chérie Mélissa,  
qui avait hâte que je commence enfin à travailler...*

## REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon professeur Dominique Pelletier, qui a su me conseiller et me diriger dans ce projet. Tes conseils judicieux et qui portent à réflexion m'ont beaucoup aidé à me surpasser et surtout, à mieux écrire.

Qu'auraient été mes deux années de maîtrise sans mes merveilleux collègues de laboratoire ? Merci à vous, Étienne Muller et Yohann Vautrin, qui ont su obéir si bien à mes ordres cachés sous la forme de questions. Grâce à vous, l'ambiance dans le laboratoire était toujours détendue et amicale. Du coup, on a pu développer une belle amitié qui restera gravée à jamais dans mon cœur.

Merci aussi au professeur Stéphane Étienne, qui a passé beaucoup de temps avec moi afin de donner un sens à ma maîtrise lors des moments les plus sombres.

Enfin, merci à mes parents et à ma copine qui m'ont soutenu dans cette aventure du début à la fin.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une formulation éléments finis qui permet de résoudre des écoulements compressibles instationnaires subsoniques. La motivation de ce travail provient de la volonté d'améliorer les prédictions d'écoulements diphasiques séparés par une interface. En particulier, on s'intéresse au déferlement de vagues qui emprisonnent une poche d'air.

D'abord, on développe une formulation des équations de Navier-Stokes compressible qui permet de gérer plusieurs régimes d'écoulements compressibles dans le même domaine. Pour résoudre ce système d'équations, on utilise une formulation par éléments finis. Pour les problèmes instationnaires, on utilise la méthode des « Backward Differentiation Formula » (BDF) avec un estimateur d'erreur de troncature pour effectuer l'intégration temporelle. En plus, on utilise une formulation ALE qui laisse le maillage se déplacer dans le temps pour lui permettre de suivre les déformations d'une ou plusieurs frontières du domaine (comme c'est le cas pour un écoulement avec interface).

Ces outils mentionnés ci-haut sont déjà tous utilisés pour le calcul d'écoulements à interface, mais pour des fluides incompressibles seulement. Donc, le but de ce mémoire est d'implémenter dans les formulations les termes compressibles qui s'ajoutent aux équations incompressibles. Pour vérifier que l'implémentation est bien faite, on effectue la vérification par la méthode des solutions manufacturées. On présente d'abord un problème stationnaire compressible pour montrer que les termes stationnaires sont bien résolus suivi par une solution manufacturée instationnaire compressible qui fait intervenir tous les termes ajoutés. Ainsi, on peut vérifier que les méthodes BDF se comportent de la bonne façon pour l'estimation des dérivées temporelles de la pression et de la température (essentiellement les termes ajoutés par la formulation compressible).

Ensuite, puisque le problème de la vague déferlante se caractérise par la compression d'une poche de gaz, on procède à la validation du code avec le problème de Bagnold. Ce problème en 1D consiste à évaluer la pression de l'air dans un contenant compressé par un piston. Une fois la validation terminée, on se lance dans le calcul final du cas de déferlement de la vague. Les résultats obtenus sont encourageants comparativement à la formulation tout incompressible, mais il reste du travail à faire pour obtenir un modèle qui représente le mieux possible la réalité.

## ABSTRACT

In this work, we present a finite element formulation to solve compressible transient flows. The motivation for this project comes from the will to get better predictions on interface flows. We present a special interest in sloshing where a pocket of gas is trapped under a wave of incompressible fluid.

First, we develop a formulation of the compressible Navier-Stokes equations that is well-posed for the limit cases where the Mach number tends towards zero. This allows us to compute a solution where there are multiple regimes of compressible flows in different parts of the domain. To do so, we use a finite element solver coupled with the adaptive "Backward Diffentiation Formula" (BDF) method for time integration. Moreover, we use an ALE formulation that allows the mesh to move in time to track the deformation of one or more boundaries (like an interface).

Presently, all the tools that are mentionned are already used to solve interface flows where all the fluids are incompressible. So, the main objective of this work is to implement the compressible transient terms in the already existing incompressible solver. Once this is done, we want to verify if the implementation was done correctly by the method of manufactured solutions (MMS). The first MMS we do is a stationnary problem to verify if the compressible flow equations that are already implemented are correctly solved in space. Then, we test an unsteady MMS, to verify if the transient terms that were added are also solved correctly.

Once the implementation is verified, we may validate the code. We chose a solution that fits well with the interface problem that we want to solve (the Large Gas Pocket problem). Hence, we choose to solve the Bagnold's 1D model that characterizes the behavior of air being compressed by a mass of fluid. Finally, with the verification and validation done for the terms that were implemented, we jump on the real case problem. In this problem, we compare the newly implemented compressible solution with the solution where air is considered as incompressible. The results that are obtained are encouraging, but a lot of work is yet to be done before getting a truly good estimation of this case.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	ix
LISTE DES FIGURES . . . . .	x
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS . . . . .	xi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
CHAPITRE 2 ÉQUATIONS DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES	5
2.1 Navier-Stokes compressible . . . . .	5
2.2 Écriture dimensionnelle . . . . .	5
2.2.1 Réécriture de l'équation de continuité . . . . .	6
2.2.2 Équation d'état . . . . .	8
2.2.3 Système dimensionnel . . . . .	8
2.3 Écriture adimensionnelle . . . . .	8
2.3.1 Système adimensionnel . . . . .	9
2.3.2 Nombres adimensionnels . . . . .	10
2.3.3 Cas limites . . . . .	11
2.4 Écriture unifiée . . . . .	13
CHAPITRE 3 RÉOLUTION DES ÉQUATIONS	14
3.1 Éléments finis . . . . .	14
3.1.1 Forme faible . . . . .	14
3.1.2 Discrétisation . . . . .	16
3.1.3 Résolution . . . . .	18
3.2 Les méthodes de type « Backward Differentiation Formula » . . . . .	19

3.2.1	Formulation des BDF . . . . .	20
3.2.2	Aspects adaptatifs . . . . .	21
3.3	Adaptation de maillage . . . . .	23
3.3.1	Adaptation en fonction de l'erreur estimée . . . . .	23
3.3.2	Adaptation en fonction de la distance à l'interface . . . . .	24
3.4	Formulation ALE et maillage pseudo-solide . . . . .	26
CHAPITRE 4 VÉRIFICATION		28
4.1	Méthode des solutions manufacturées . . . . .	28
4.2	Couche limite compressible 2D . . . . .	29
4.2.1	Description du problème . . . . .	29
4.2.2	Étude de convergence . . . . .	30
4.3	Écoulement de Poiseuille compressible instationnaire . . . . .	34
4.3.1	Description du problème . . . . .	35
4.3.2	Étude de convergence . . . . .	36
CHAPITRE 5 APPLICATIONS		40
5.1	Problème de Bagnold . . . . .	40
5.1.1	Description du problème . . . . .	40
5.1.2	Modèle de Bagnold . . . . .	41
5.1.3	Analyse dimensionnelle . . . . .	43
5.1.4	Résultats . . . . .	47
5.2	Poche d'air emprisonnée sous une vague . . . . .	51
5.2.1	Description du problème . . . . .	52
5.2.2	Résultats . . . . .	55
CHAPITRE 6 CONCLUSION		68
6.1	Synthèse des travaux . . . . .	68
6.2	Limitations de la solution proposée . . . . .	69
6.3	Améliorations futures . . . . .	70
RÉFÉRENCES . . . . .		72



## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Nombres adimensionnels . . . . .	10
Tableau 2.2	Coefficients des écritures compressibles et incompressibles . . . . .	13
Tableau 3.1	Valeurs maximales $\mathcal{S}_{max}$ . . . . .	22
Tableau 4.1	Erreurs exactes et estimées . . . . .	32
Tableau 4.2	Taux de convergence $k$ des méthodes BDF pour les variables $T$ et $p$	39
Tableau 5.1	Variables représentant le problème de Bagnold . . . . .	43
Tableau 5.2	Groupes adimensionnels du problème de Bagnold . . . . .	46
Tableau 5.3	Propriétés des fluides . . . . .	53

## LISTE DES FIGURES

Figure 3.1	Élément de Taylor-Hood P2-P1 . . . . .	17
Figure 3.2	Fonction distance qui pilote le remaillage . . . . .	26
Figure 4.1	Géométrie et conditions limites . . . . .	30
Figure 4.2	Maillages initial et final de la solution manufacturée . . . . .	31
Figure 4.3	Courbes de convergence . . . . .	32
Figure 4.4	Géométrie et conditions limites . . . . .	36
Figure 4.5	Zoom du maillage sur le haut du domaine . . . . .	37
Figure 4.6	Taux de convergence des BDF . . . . .	38
Figure 5.1	Modèle du piston de Bagnold en 1D . . . . .	40
Figure 5.2	Modèle du piston modifié en 1D . . . . .	41
Figure 5.3	Maillages initial et compressé du problème de Bagnold . . . . .	48
Figure 5.4	Comparaison des solutions entre <i>matlab</i> et <i>CADYF</i> pour $S = 0.1$ . . .	49
Figure 5.5	Comparaison des solutions entre <i>matlab</i> et <i>CADYF</i> pour $S = 10$ . . .	50
Figure 5.6	Domaine et interface initiale de la vague . . . . .	53
Figure 5.7	Arrêtes initiales et déformées sur la surface libre . . . . .	55
Figure 5.8	Évolution du maillage . . . . .	57
Figure 5.9	Comparaison des interfaces pour le cas simple-cœur et un cas multi-cœurs	59
Figure 5.10	Évolution de la pression . . . . .	61
Figure 5.11	Évolution du nombre de Mach en fin de simulation . . . . .	63
Figure 5.12	Interfaces de l'air incompressible et de l'air compressible . . . . .	64
Figure 5.13	Comparaison des pressions sur la paroi au temps final . . . . .	65
Figure 5.14	Comparaison du nombre de Mach sur la paroi au temps final . . . .	66
Figure 5.15	Comparaison de la masse volumique sur la paroi au temps final . . .	67

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS

### ABRÉVIATIONS

CFD	Computational Fluid Dynamics
GNL	Gaz Naturel Liquéfié
LGP	Large Gaz Pocket
ELP	Elementary Loading Process
BDF	Backward Differentiation Formulas
ALE	Arbitrary Lagrangian Eulerian

### NOTATIONS

#### Notations mathématiques

$\mathbf{a}$	Variable vectorielle
$\mathbf{a}$	Tenseur d'ordre 2
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Produit scalaire euclidien
$\  \cdot \ $	Norme associée au produit scalaire euclidien
$\mathbf{a} : \mathbf{b}$	Produit doublement contracté
$\nabla(\cdot)$	Opérateur gradient
$\nabla \cdot \mathbf{a}$	Divergence de $\mathbf{a}$
$\mathbf{I}$	Matrice identité
$\mathbf{a}^T$	Transposée du tenseur $\mathbf{a}$
$\sim$	Notation adimensionnelle
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker
$\ln(x)$	Logarithme naturel du scalaire $x$
$e^x$	Exponentielle du scalaire $x$
$\delta_{\mathbf{u}}, \delta_p, \delta_T$	Fonctions test pour les variables à résoudre
$\Omega$	Domaine de calcul
$\Gamma$	Frontière du domaine de calcul
$\Gamma_D^i$	Portion de frontière avec condition limite de Dirichlet pour la variable $i$
$\Gamma_N^i$	Portion de frontière avec condition limite de Neumann pour la variable $i$
$\emptyset$	Ensemble vide

$\cup$	Union ensembliste
$\cap$	Intersection ensembliste
$R$	Résidu
$\delta \mathbf{x}$	Vecteur de correction
$\mathbf{x}^n$	Vecteur solution initiale à l'itération $n$
$\mathbf{x}^{n+1}$	Vecteur solution calculé à l'itération $n$
$\mathbf{J}_R$	Matrice jacobienne associée à $\mathcal{R}_n$
$\varepsilon_x$	Critère d'arrêt sur le vecteur correction
$\varepsilon_R$	Critère d'arrêt sur le résidu
$h$	Pas de temps, ou taille caractéristique de maille
$p$	Ordre de la méthode linéaire multi-pas
$S$	Swing factor
$C_{p+1}$	Constante d'erreur pour la méthode BDF- $p$
$e_{n+1}$	Erreur locale introduite sur le dernier pas de temps
$Q^*$	Reconstruction de la solution éléments-finis
$Q_h$	Solution éléments-finis
$\zeta$	Facteur de réduction d'erreur
$N$	Nombre d'éléments dans le maillage courant
$E_h$	Erreur globale

## Notations physiques

$\mathbf{x}$	Vecteur position
$x$	Première coordonnée cartésienne
$y$	Seconde coordonnée cartésienne
$\alpha_r$	Coefficient de compressibilité isotherme
$\beta_r$	Coefficient de dilatation thermique isobare
$\mathbf{u}$	Vecteur vitesse d'une particule fluide
$\mathbf{v}$	Vitesse ALE
$\mathbf{g}$	Vecteur gravité
$u$	Composante de vitesse suivant l'axe des $x$
$v$	Composante de vitesse suivant l'axe des $y$
$\rho_f$	Masse volumique du fluide
$\boldsymbol{\tau}$	Tenseur des contraintes visqueuses compressibles
$\boldsymbol{\epsilon}$	Tenseur du taux de déformation compressible
$p_m$	Pression mécanique
$p_r$	Pression thermodynamique de référence

$p$	Pression totale
$T_m$	Température mécanique
$T_r$	Température thermodynamique de référence
$T$	Température totale
$\mu$	Viscosité dynamique
$\nu$	Viscosité cinématique
$L_s$	Longueur caractéristique
$U_s$	Vitesse caractéristique
$\rho_r$	Masse volumique de référence
$\mu_r$	Viscosité dynamique de référence
$t_s$	Échelle de temps caractéristique
$Re$	Nombre de Reynolds
$Mr$	Nombre de Mach de référence
$Fr$	Nombre de Froude
$Pr$	Nombre de Prandtl
$Ec$	Nombre d'Eckert
$E$	Déformation d'un élément
$\chi$	Vecteur de déplacement du maillage

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Le transport du gaz naturel liquéfié (GNL) par bateau pose plusieurs défis d'ingénierie quant à la conception des cuves destinées à son transport sécuritaire. Dans la cuve, il se forme un équilibre entre la phase gazeuse et la phase liquide. Malencontreusement, la phase gazeuse du GNL se trouve à être du méthane, ce qui présente un risque de sécurité non-négligeable. Pour cette raison, les transporteurs sont soumis à des réglementations qui les empêchent de naviguer lorsque la cuve est remplie entre 10% et 90% de sa capacité maximale. Or, de par le design récent des plateformes d'extraction qui comporte des plus petites unités de liquéfaction, les transporteurs doivent s'arrêter à plusieurs plateformes avant de faire le plein. Ainsi, on doit réussir à mieux comprendre le déferlement du GNL afin de pouvoir mettre à jour les réglementations en vigueur.

Pour étudier le problème, des études expérimentales ont été faites sur des modèles réduits [1]. Pour des raisons de sécurité évidentes, les expériences ont été faites avec de l'eau et de l'air et non du GNL. Or, le couple eau-air n'est pas thermodynamiquement similaire au couple méthane-GNL. D'où l'intérêt des simulations par ordinateur : on tente d'imiter les résultats expérimentaux pour l'air et l'eau afin de trouver des règles de similitudes entre les modèles à petite échelle et les modèles à grande échelle.

Une des données les plus importantes pour le design de telles cuves est la pression d'impact maximale d'une vague de GNL sur les parois verticales de la cuve. Dans ce cas-ci, la complexité du problème vient du fait qu'il y a deux phases de fluides (liquide et gaz) et que la poche de gaz est emprisonnée sous la vague de liquide, créant ainsi un cas de *Large Gas Pocket* (LGP) [2].

Un groupe de recherche et de partenaires industriels s'est penché sur le sujet pour effectuer des tests à tailles réelles afin de mieux comprendre les phénomènes de vagues déferlantes et de pouvoir comparer ces résultats aux simulations faites par ordinateur (CFD). De par les travaux récents sur le sujet [1, 3–5], il est montré qu'il y a plusieurs phénomènes extrêmement complexes à modéliser qui sont présents dans le cas d'une vague déferlante impactant un mur vertical. De plus, l'impact de chacun de ces phénomènes n'est pas facilement quantifiable puisqu'il y en a plusieurs qui interagissent entre eux : la propagation de vagues de pression dans le liquide, la compressibilité du gaz emprisonné entre le liquide et le mur, des instabilités de surface (Rayleigh-Taylor et Kelvin-Helmoltz), transition de phase et interactions fluides-structures [3].

Par contre, il est montré que les forces générées par l'impact de la vague sur le mur peuvent

être décomposées en trois *Elementary Loading Processes* (ELP) (voir Lafeber) : l'ELP 1 est l'impact direct de la vague sur le mur, l'ELP 2 est causé par le jet créé par le changement de direction du fluide en frappant le mur et l'ELP 3 est décrit par la compressibilité / expansion du gaz emprisonné. Encore une fois, une des difficultés est de comprendre l'effet de chacun d'eux sur la pression d'impact calculée et de comprendre comment ces ELPs interagissent entre eux.

Pour résoudre ce type de problème avec plusieurs fluides séparés par une interface bien définie, il existe plusieurs types d'algorithmes comme des algorithmes de captures d'interface et des algorithmes de suivi d'interface qui comportent chacun leurs lots d'avantages et d'inconvénients. Au laboratoire du professeur D. Pelletier, on utilise un algorithme de suivi d'interface couplé à un algorithme d'intégration en temps adaptatif en ordre et en pas de temps pour résoudre l'écoulement de deux fluides incompressibles. Ceci étant dit, ce mémoire porte une attention particulière au troisième ELP, soit l'implémentation des termes compressibles instationnaires pour pouvoir simuler le cas d'un gaz compressible avec un fluide incompressible.

## Problématique

Dans les modèles compressibles, on résout les équations de Navier-Stokes avec une masse volumique variable en fonction de la pression et de la température. Or, même si un fluide est dit compressible, il n'est pas impossible de le retrouver dans un régime d'écoulement incompressible. Pour se faire une idée de la grandeur des effets compressibles de l'écoulement sur le fluide, on peut se fier au nombre de Mach qui représente le rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse du son locale ( $M = U/\sqrt{\gamma RT}$ ). On peut dire que celui-ci est aux écoulements compressibles/incompressibles ce que le nombre de Reynolds est aux écoulements laminaires/turbulents. En ce sens, on peut définir des régimes d'écoulements basés sur le nombre de Mach [6].

- $M < 0.3$  : l'écoulement est subsonique où les variations de vitesse ne sont pas assez élevées pour avoir un effet majeur sur la masse volumique. Or, dans le cas des écoulements anélastiques, même si les variations de vitesse n'introduisent pas de perturbations marquantes, les variations de température peuvent fortement influencer la masse volumique.
- $0.3 < M < 0.8$  : l'écoulement est subsonique où les variations de vitesse engendrent des variations de pression suffisamment fortes pour avoir un effet non-négligeable sur la masse volumique. Ce mémoire porte sur ce régime d'écoulement en particulier.
- $0.8 < M < 1.2$  : l'écoulement est transsonique. Dans ce type d'écoulement, certaines régions peuvent être localement supersoniques si l'écoulement est subsonique et vice

versa si l'écoulement est supersonique (on peut retrouver des zones où l'écoulement sera subsonique localement).

- $M > 1.2$  : l'écoulement est supersonique dans toutes les régions du domaine.

Puisque le nombre de Mach est une variable locale, un écoulement peut se retrouver avec différentes régions du domaine qui seront dans différents régimes d'écoulement. Le cas de la vague déferlante présente bien ce concept. En premier, on considère l'eau comme incompressible puisque de grands changements de pression affectent très peu sa densité et on considère l'air comme compressible. En deuxième, si on ne regarde que le comportement de l'air, on peut comprendre facilement que la région où la poche est emprisonnée aura des effets de compressibilité beaucoup plus importants qu'ailleurs dans le domaine. Donc, on doit utiliser une formulation des équations de Navier-Stokes qui va nous permettre de simuler plusieurs régimes d'écoulements à l'intérieur d'un seul domaine, ce qui mène aux objectifs de recherche qui suivent.

**Objectif général** Développer et implémenter une formulation éléments finis pour traiter les écoulements séparés pour un liquide incompressible et un gaz compressible.

### Objectifs spécifiques

- Développer une écriture bien posée des équations de Navier-Stokes instationnaires pour le cas limite de l'écoulement d'un fluide compressible à  $M = 0$  ;
- Vérifier l'implémentation des termes de compressibilité instationnaires avec la méthode des solutions manufacturées.
- Appliquer le code en comparant les résultats d'un problème compressible avec ceux obtenus avec le logiciel *matlab*.
- Améliorer les prédictions des valeurs de la pression d'impact et du nombre de Mach pour le cas de la LGP en appliquant le modèle implémenté.

### Plan du mémoire

Pour ce faire, on a organisé ce mémoire comme suit. On commence par présenter l'écriture unifiée des équations de Navier-Stokes qui permet de résoudre les différents régimes d'écoulements mentionnés (en subsonique). Puis, dans le chapitre 3, on montre les méthodes numériques utilisées pour résoudre ces équations. Dans notre cas, on applique la méthode des éléments finis pour résoudre les équations. Aussi, on présente la méthode utilisée pour l'intégration en temps et l'algorithme d'adaptation de maillage. Ensuite, dans le chapitre 4, on fait la vérification des implémentations par la méthode de solutions manufacturées. Enfin,



le chapitre 5 présente un cas d'application suivi par la simulation du cas de la LGP décrit ci-haut. Ce mémoire se termine par une conclusion qui met en évidence les limitations de ce travail ainsi que les améliorations futures possibles.

## CHAPITRE 2 ÉQUATIONS DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES

### 2.1 Navier-Stokes compressible

Le système d'équations de Navier-Stokes régissant les écoulements compressibles s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \quad (2.2)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \beta T \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p \right) + (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) + q \quad (2.3)$$

$$\rho = \rho(p, T) \quad (2.4)$$

Dans ce système d'équations,  $\mathbf{u}$  représente le vecteur vitesse,  $p$  la pression et  $T$  la température. Les variables  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $c_p$ ,  $k$  et  $\beta$  sont respectivement la masse volumique, la viscosité, la chaleur massique isobare, la conductivité thermique du fluide et le coefficient de dilatation thermique. Le tenseur des contraintes visqueuses est défini par  $\boldsymbol{\tau} = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}$ . Le terme  $\mathbf{f}$  de l'équation (2.2) représente les forces volumiques et le terme  $q$  de l'équation (2.3) représente une source de chaleur quelconque.

Le système d'équations (2.1)-(2.4) est valide pour un fluide newtonien quelconque. Dans notre cas, on va simplifier ce système en faisant l'hypothèse que le fluide est un gaz parfait et que l'hypothèse de Stokes est vérifiée ( $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu$ ). Il a été montré que pour l'air, l'hypothèse de Stokes est une bonne approximation de la viscosité  $\lambda$  [7]. Aussi, il est important de noter que tous les développements et les calculs effectués dans ce mémoire se font à propriétés constantes (mise-à-part la densité  $\rho$ ). C'est-à-dire que la viscosité, la chaleur massique et la conductivité thermique ne dépendent pas de la température.

### 2.2 Écriture dimensionnelle

Dans les écoulements compressibles, la pression et la température jouent deux rôles : un rôle mécanique et un rôle thermodynamique.

#### Pression

- Mécanique : La pression mécanique agit dans l'équation du mouvement (2.2) sous la forme d'un  $\Delta p$ . Ainsi, seule la pression relative importe.

- Thermodynamique : La pression absolue sert à calculer la masse volumique dans l'équation d'état (2.4).

## Température

- Mécanique : La température mécanique agit dans l'équation d'énergie (2.3) sous la forme d'un  $\Delta T$ . Ainsi, seule la température relative importe.
- Thermodynamique : La température absolue sert à calculer la masse volumique dans l'équation d'état (2.4).

En effectuant cette séparation des rôles, on peut réécrire l'équation de continuité sous une forme plus explicite.

### 2.2.1 Réécriture de l'équation de continuité

En prenant l'équation de continuité (2.1) et en appliquant les propriétés de l'opérateur de divergence on peut obtenir la forme suivante :

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \right] \quad (2.5)$$

Puisque l'on a  $\rho = \rho(p, T)$ , on peut réécrire l'équation (2.5) en terme des variables thermodynamiques  $p$  et  $T$  :

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] + \frac{\mathbf{u}}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \nabla p + \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \nabla T \right] \quad (2.6)$$

Ensuite, on introduit deux propriétés du fluide :

- Coefficient de compressibilité isotherme

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T$$

- Coefficient de dilatation thermique

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p$$

En réarrangeant les termes de l'équation (2.5) et en y introduisant les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , on

obtient la forme suivante :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{u} &= \alpha \frac{Dp}{Dt} - \beta \frac{DT}{Dt} \\ &= \alpha \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p \right) - \beta \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Avec cette écriture, on a séparé les effets thermodynamiques sur  $\rho$  ( $\alpha$  et  $\beta$ ) des effets de l'écoulement sur  $\rho$  ( $\frac{Dp}{Dt}$ ,  $\frac{DT}{Dt}$ ).

Maintenant, si l'on fait l'hypothèse d'un gaz parfait, on peut démontrer que

$$\alpha = \frac{1}{p} \quad (2.8)$$

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (2.9)$$

De plus, en séparant les rôles mécanique et thermodynamique joués par  $p$  et  $T$ , on peut définir les variables suivantes :

$$p = p_m + p_r \quad (2.10)$$

$$T = T_m + T_r \quad (2.11)$$

où  $p_r$ ,  $T_r$  sont les niveaux de référence thermodynamiques,  $p_m$ ,  $T_m$  sont les variations de pression et de température induites par l'écoulement et  $p$ ,  $T$  sont la pression et la température absolues.

En insérant les équations (2.10) et (2.11) dans les équations (2.8) et (2.9) on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{p} = \frac{1}{p_m + p_r} = \frac{1}{p_r \left( \frac{p_m}{p_r} + 1 \right)} \\ &= \frac{\alpha_r}{(\alpha_r p_m + 1)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{T} = \frac{1}{T_m + T_r} = \frac{1}{T_r \left( \frac{T_m}{T_r} + 1 \right)} \\ &= \frac{\beta_r}{(\beta_r T_m + 1)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Finalement, en substituant les expressions (2.12) et (2.13) pour  $\alpha$  et  $\beta$  dans l'équation (2.7) on obtient l'expression finale de l'équation de continuité soit :

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\alpha_r}{\alpha_r p_m + 1} \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p_m \right) - \frac{\beta_r}{\beta_r T_m + 1} \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_m \right) \quad (2.14)$$

### 2.2.2 Équation d'état

Dans la section 2.1, on a fait l'hypothèse que le fluide est un gaz parfait. On a donc :

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (2.15)$$

On peut aussi substituer les équations (2.10) et (2.11) dans l'équation (2.15). Ainsi, l'équation d'état devient :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{RT} = \frac{(p_m + p_r)}{R(T_m + T_r)} = \frac{p_r}{RT_r} \left( \frac{\frac{p_m}{p_r} + 1}{\frac{T_m}{T_r} + 1} \right) \\ &= \rho_r \frac{(\alpha_r p_m + 1)}{(\beta_r T_m + 1)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

### 2.2.3 Système dimensionnel

Avec les développements effectués dans les sections 2.2.1 et 2.2.2, on peut réécrire le système d'équations (2.1)-(2.4) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\alpha_r}{\alpha_r p_m + 1} \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p_m \right) - \frac{\beta_r}{\beta_r T_m + 1} \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_m \right) \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p_m + \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \rho \mathbf{f} \\ \rho c_p \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_m \right) &= \nabla \cdot (k \nabla T_m) + \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p_m \right) + (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) + q \\ \rho &= \rho_r \frac{(\alpha_r p_m + 1)}{(\beta_r T_m + 1)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

où l'indice  $r$  dénote un état de référence thermodynamique.

## 2.3 Écriture adimensionnelle

Le but de trouver une écriture sans dimension est de pouvoir comparer les termes de l'équation entre eux afin de déterminer lesquels seront prépondérants dans le type d'écoulement étudié.

Pour obtenir une écriture adimensionnelle, on introduit les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{x} = \frac{x}{L_s} & \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U_s} & \tilde{p}_m = \frac{p_m}{p_s} & \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_r} & \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_r} \\ \tilde{\nabla} = \nabla L_s & \tilde{t} = \frac{t}{t_s} & \tilde{T}_m = \frac{T_m}{T_s} & \tilde{c}_p = \frac{c_p}{c_{p_r}} & \tilde{k} = \frac{k}{k_r} \end{array}$$

### 2.3.1 Système adimensionnel

Dans les variables présentées, on fait apparaître entre autres une échelle de pression et une échelle de temps qu'il faut déterminer. L'échelle de pression est définie en équilibrant le terme de convection et de pression dans l'équation du mouvement. On obtient alors une échelle de pression qui représente deux fois la pression dynamique :

$$p_s = \rho_r U_s^2 \quad (2.18)$$

Pour l'échelle de temps, on divise simplement la longueur caractéristique par la vitesse caractéristique :

$$t_s = \frac{L_s}{U_s} \quad (2.19)$$

En exprimant les variables dimensionnelles en terme des variables sans dimension dans le système (2.17), on peut trouver les formes adimensionnelles des équations. Le système (2.20) montre le résultat de l'adimensionnalisation. Afin de simplifier l'écriture, toutes les variables adimensionnelles sont écrites sans le  $\sim$ .

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\gamma M_r^2}{\gamma M_r^2 p_m + 1} \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p_m \right) - \frac{T_s/T_r}{\frac{T_s}{T_r} T_m + 1} \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_m \right) \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p_m + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{f} \\ \rho c_p \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_m \right) &= \frac{1}{Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T_m) + Ec \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p_m \right) + \frac{Ec}{Re} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) + q \\ \rho &= \rho_r \frac{(\gamma M_r^2 p_m + 1)}{(\frac{T_s}{T_r} T_m + 1)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 2.3.2 Nombres adimensionnels

Dans le système (2.20), plusieurs nombres sans dimension apparaissent et leur expression est présentée dans le tableau 2.1.

Tableau 2.1 Nombres adimensionnels

Nombre adimensionnel	Expression
$\gamma$	$\frac{c_{p_r}}{c_{v_r}}$
$M_r$	$\frac{U_s}{\sqrt{\gamma R_g T_r}}$
$Re$	$\frac{\rho_r U_s L_s}{\mu_s}$
$Fr$	$\frac{U_s}{\sqrt{g L_s}}$
$Pr$	$\frac{c_{p_r} \mu_r}{k_s}$
$Ec$	$\frac{U_s^2}{c_{p_r} T_s} = \frac{(\gamma_r - 1) M_r^2}{T_s / T_r}$

On va maintenant se pencher sur le détail de certains d'entre eux ainsi que la façon dont ils apparaissent dans le système (2.20) afin de mieux comprendre leur signification physique.

#### Nombre de Mach

Le nombre de Mach de référence ( $M_r$ ) apparaît dans l'équation de continuité et dans l'équation d'état. En adimensionnalisant l'équation de continuité, le terme  $(\frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p_m)$  se retrouve avec le coefficient  $\frac{p_s}{p_r} \frac{1}{(\frac{p_s}{p_r} \bar{p}_m + 1)}$ . Ce qui nous intéresse ici est le terme  $\frac{p_s}{p_r}$ . En effet, on peut transformer ce terme afin de faire ressortir le nombre de Mach de référence en utilisant l'équation d'état ( $\rho_r = \frac{p_r}{RT_r}$ ) et l'échelle de pression définie par l'équation (2.18) ( $p_s = \rho_r U_s^2$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{p_s}{p_r} &= \frac{1}{p_r} \rho_r U_s^2 = \frac{1}{p_r} \frac{p_r}{RT_r} U_s^2 = \frac{U_s^2}{RT_r} = \frac{\gamma_r}{\gamma_r} \frac{U_s^2}{RT_r} = \gamma M_r^2 \\ &\Rightarrow \frac{p_s}{p_r} = \gamma M_r^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

En observant l'équation (2.21), on peut voir que le nombre de Mach est directement relié aux variations de pression causées par l'écoulement. Donc, le nombre de Mach représente l'intensité des effets de la pression sur l'écoulement pour un problème donné.

## Nombre d'Eckert

Le nombre d'Eckert apparaît quant à lui à deux endroits dans l'équation d'énergie. L'expression généralisée décrite dans la littérature est la suivante [8] :

$$Ec = \frac{U_s^2}{c_{p_r} \Delta T} = \frac{U_s^2}{c_{p_r} T_s} \quad (2.22)$$

Dans le processus d'adimensionnalisation, c'est exactement l'expression qu'on obtient, mais on veut le définir en terme du nombre de Mach de référence et de la température afin d'expliquer leur rôle dans l'équation d'énergie. Pour ce faire, on effectue les manipulations suivantes :

$$\frac{U_s^2}{c_{p_r} \Delta T} = \frac{U_s^2}{c_{p_r}} \frac{\gamma_r R}{\gamma_r R} \frac{1}{T_s \frac{T_r}{T_r}} = \gamma_r M_r^2 \frac{R}{c_{p_r} (T_s/T_r)} \quad (2.23)$$

Puis, on se sert de la relation de Mayer ( $R = c_{p_r} - c_{v_r}$ ) afin de simplifier l'équation (2.23) :

$$\gamma_r M_r^2 \frac{R}{c_{p_r} (T_s/T_r)} = \frac{\gamma_r M_r^2}{T_s/T_r} \frac{c_{p_r} - c_{v_r}}{c_{p_r}} = \frac{\gamma_r M_r^2}{T_s/T_r} \left(1 - \frac{1}{\gamma_r}\right) = \frac{(\gamma_r - 1) M_r^2}{T_s/T_r} \quad (2.24)$$

Avec cette forme, il est facile de s'imaginer l'effet du nombre de Mach et de la température mécanique sur l'écoulement. En effet, si le nombre de Mach est grand, le nombre d'Eckert sera grand et on en déduit que l'énergie liée à la compression de l'écoulement est grande. Au contraire, si le ratio des températures mécanique et de référence est grand, le nombre d'Eckert sera petit et on saura que l'apport en énergie des effets compressibles du fluide sera petit par rapport à l'énergie interne.

### 2.3.3 Cas limites

Dans le système d'équations adimensionnel, on a effectué un travail afin de faire ressortir le nombre de Mach ainsi que le ratio des températures (mécanique sur référence). C'est dans les cas limites que cette forme prend toute son utilité.

En effet, on peut étudier quatre types d'écoulements avec ce même système et l'adimensionnalisation fait en sorte que les bonnes équations sont résolues pour chacun d'eux. Les types d'écoulements sont :

- Compressible,  $\rho = \rho(p, T)$
- Anélastique,  $\rho = \rho(T)$
- Barotrope,  $\rho = \rho(p)$
- Incompressible,  $\rho = cte$



Le système d'équation (2.20) décrit un écoulement compressible. Or, il est important d'identifier et de traiter les cas limites, qui sont les écoulements anélastique, barotropique et incompressible.

D'abord, les écoulements anélastiques. Ceux-ci se caractérisent par un nombre de Mach qui tend vers zéro ( $M_r \rightarrow 0$ ) et représentent un écoulement où le fluide est fortement chauffé. Ainsi, la masse volumique ne dépend que de la température puisque les effets de la pression sont annulés en posant  $M_r = 0$ .

Ensuite, les écoulements barotropes. Ceux-ci se caractérisent par une loi d'état qui ne dépend que de la pression et représentent des écoulements où les isobares sont parallèles aux isopycnes, c'est-à-dire que la densité ne varie qu'en fonction de la pression et que la température est constante sur les différents niveaux de pression. De ce fait, on doit faire tendre le coefficient de dilatation thermique vers 0 ( $T_s/T_r \rightarrow 0$ ). Afin de mieux poser les équations dans ce cas, on peut multiplier l'équation d'énergie par  $T_s/T_r$  afin d'éviter la division par 0 dans le nombre d'Eckert.

Puis, les écoulements incompressibles. En effet, il est possible de simuler des écoulements incompressibles avec le système (2.20). Ceux-ci sont caractérisés par une masse volumique constante, ce qui implique que  $M_r \rightarrow 0$  (comme les écoulements anélastiques) et que les différences de température tendent aussi vers 0 ( $T_s/T_r \rightarrow 0$ ). Dans ce cas-ci, le système d'équation devient :

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\
 \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p_m + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{f} \\
 \rho c_p \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_m \right) &= \frac{1}{RePr} \nabla \cdot (k \nabla T_m) + q \\
 \rho &= \rho_r
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

On peut voir qu'on retrouve la forme classique des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible. Le seul terme qui n'est pas présent dans les équations incompressibles est le terme  $\frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}$ . Or, puisque l'équation d'état est devenue  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , ce terme sera nul dans l'équation du mouvement.

Aussi, on peut remarquer qu'il y aura une indétermination dans le nombre d'Eckert lorsque l'on pose ( $T_s/T_r = 0$ ). Par contre, il a déjà été démontré que l'indétermination causée par  $Ec = \frac{0}{0}$  peut être gérée en posant  $Ec = 0$  [9].

## 2.4 Écriture unifiée

Avec cette forme d'écriture, il est possible d'obtenir un seul système d'équation qui va permettre, via des coefficients, de modéliser tous les types d'écoulements décrits (incompressible, anélastique et compressible) et ce, en dimensionnel ou en adimensionnel. Ce système est le suivant :

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\alpha_r}{\alpha_r p_m + 1} \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p_m \right) - \frac{\beta_r}{\beta_r T_m + 1} \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_m \right) \\
\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p_m + \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \rho \mathbf{f} \\
\rho c_p \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_m \right) &= \nabla \cdot (k \nabla T_m) + r_{cw} \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p_m \right) + r_\phi (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) + q \\
\rho &= \rho_r \frac{(\alpha_r p_m + 1)}{(\beta_r T_m + 1)}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

où  $r_{cw}$  est le coefficient du travail de compression et  $r_\phi$  est le coefficient de l'échauffement visqueux.

Finalement, afin de résoudre le type d'écoulement choisi avec le système (2.26), il ne suffit que de se fier au tableau 2.2 afin de choisir les bonnes valeurs des coefficients.

Tableau 2.2 Coefficients des écritures compressibles et incompressibles

Coefficient	Incompressible		Compressible	
	Dimensionnel	Adimensionnel	Dimensionnel	Adimensionnel
$\alpha_r$	0	0	$\frac{1}{p_r}$	$\frac{p_s}{p_r} = \gamma_r M_r^2$
$\beta_r$	0	0	$\frac{1}{T_r}$	$\frac{T_s}{T_r}$
Viscosité ( $\mu$ )	$\mu$	$\frac{1}{Re} \tilde{\mu}$	$\mu$	$\frac{1}{Re} \tilde{\mu}$
Force volumique ( $\rho f$ )	$\rho f$	$\frac{1}{Fr^2} \tilde{f}$	$\rho f$	$\frac{1}{Fr^2} \tilde{f}$
Chaleur massique ( $c_p$ )	$c_p$	$\tilde{c}_p$	$c_p$	$\tilde{c}_p$
Conductivité ( $k$ )	$k$	$\frac{1}{RePr} \tilde{k}$	$k$	$\frac{1}{RePr} \tilde{k}$
$r_{cw}$	0	0	1	$Ec$
$r_\phi$	0	0	1	$\frac{Ec}{Re}$
$\rho_r$	$\rho_0$	1	$\rho_r = \frac{p_r}{RT_r}$	$\rho_r = \frac{R_q}{R_{g_r}}$

## CHAPITRE 3 RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

Dans ce chapitre, on explique la méthode utilisée pour résoudre les équations présentées au chapitre 2. On présente tous les outils nécessaires afin de réaliser les calculs des chapitres 4 et 5. On décrit la méthode des éléments finis, les méthodes BDF pour l'intégration en temps, d'adaptation du maillage. Puis, on décrit la formulation ALE utilisée avec un maillage pseudo-solide pour les problèmes à interface.

### 3.1 Éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode numérique pour résoudre des problèmes pour lesquels il n'existe pas de solutions analytiques. Les équations de Navier-Stokes en sont un bon exemple, là où les seules solutions analytiques disponibles font appel à de grandes simplifications.

#### 3.1.1 Forme faible

Le développement de la forme faible à partir du problème fort (2.1)-(2.4) permet de réduire l'ordre des dérivées des variables primaires et de faire ressortir les conditions limites naturelles du problème. Ainsi, on réduit la difficulté du problème à résoudre puisque la solution recherchée nécessitera une moins grande restriction quant à sa régularité.

Pour ce faire, on procède en quatre étapes :

1. On multiplie les équations par des fonctions test  $(\delta p, \delta \mathbf{u}, \delta T)$  et on intègre l'EDP sur tout le domaine.
2. On intègre les dérivées secondes par parties afin d'abaisser l'ordre des dérivées des variables dépendantes et on utilise le théorème de la divergence afin de faire ressortir les termes de bord.
3. On applique les conditions limites.
4. On fait le choix des espaces de fonctions.

En appliquant ces quatre étapes aux équations de Navier-Stokes compressibles, on obtient la formulation faible suivante :

Trouver  $\mathbf{u} \in V, p \in Q, T \in S$  où

$$\begin{aligned} V &= \{ \delta \mathbf{u} \in H_{\Omega}^1 | \delta \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_d^u \} \\ Q &= L_{\Omega}^2 \\ S &= \{ \delta T \in H_{\Omega}^1 | \delta T = 0 \text{ sur } \Gamma_d^T \} \end{aligned}$$

tel que :

— Équation de continuité

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta p d\Omega + \int_{\Omega} \alpha \frac{Dp}{Dt} \delta p d\Omega - \int_{\Omega} \beta \frac{DT}{Dt} \delta p d\Omega = 0 \quad \forall \delta p \in Q \quad (3.1)$$

— Équation du mouvement

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} p (\nabla \cdot \delta \mathbf{u}) d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left[ 2\mu \epsilon - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] : (\nabla \delta \mathbf{u}) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V \end{aligned} \quad (3.2)$$

— Équation d'énergie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) \delta T d\Omega + \int_{\Omega} k (\nabla T \cdot \nabla \delta T) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \frac{Dp}{Dt} \cdot \delta T d\Omega - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta T d\Omega \\ - \int_{\Omega} q \cdot \delta T d\Omega - \int_{\Gamma} (k \nabla T \cdot \mathbf{n}) \delta T d\Gamma = 0 \quad \forall \delta T \in S \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $\boldsymbol{\sigma} = (-p + 2\mu \epsilon - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u})$  et  $\epsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ .

Puisque les espaces sont définis de sorte que les fonctions tests sont nulles sur les bords du domaine là où les conditions de Dirichlet sont appliquées, il est impossible de spécifier à la fois une condition de Dirichlet et de Neumann pour une même variable au même endroit. En notant  $\Gamma_d$  une frontière où des conditions de Dirichlet sont appliquées et  $\Gamma_N$  celles où des conditions de Neumann sont appliquées on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \text{ sur } \Gamma_d^u & T &= T_0 \text{ sur } \Gamma_d^T \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \hat{\mathbf{t}} \text{ sur } \Gamma_N^u & -k \nabla T &= q_b \text{ sur } \Gamma_N^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_d^u \cup \Gamma_N^u &= \Gamma & \Gamma_d^T \cup \Gamma_N^T &= \Gamma \\
\Gamma_d^u \cap \Gamma_N^u &= \emptyset & \Gamma_d^T \cap \Gamma_N^T &= \emptyset
\end{aligned}$$

### 3.1.2 Discrétisation

Une fois la formulation faible obtenue, il faut discrétiser le domaine continu en un ensemble de sous-domaines appelés *éléments finis*. En 2D, la forme la plus simple afin de représenter un domaine de forme quelconque est le triangle. D'autres formes peuvent être utilisées (comme le quadrangle), mais ce travail ne fera appel qu'à des éléments triangulaires. En utilisant des formes simples et régulières, le domaine discrétisé  $\Omega_h$  ne représentera pas exactement le domaine réel  $\Omega$  ( $\Omega_h \neq \Omega$ ) si celui-ci possède une frontière courbe quelconque.

En discrétisant le domaine, on approxime les espaces continus  $V$ ,  $Q$  et  $S$  par des sous-espaces d'éléments finis notés  $V_h$ ,  $Q_h$  et  $S_h$ . Chaque sous-espace créé dépendra du type d'élément choisi pour résoudre le problème. Dans notre cas, on utilise l'élément de Taylor-Hood ( $P_2-P_1$ ) ou l'élément  $P_1-P_1$  stabilisé. Il est important de noter que l'élément de Taylor-Hood respecte la condition LBB [10] alors que l'élément  $P_1-P_1$  ne la respecte pas, c'est pourquoi on doit insérer des termes de stabilisation en pression pour cet élément.

Les espaces étant discrétisés, on obtient le problème élément finis suivant :

Trouver  $\mathbf{u}_h \in V_h, p_h \in Q_h, T_h \in S_h$  tel que :

$$(\delta p_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) + \left( \alpha \frac{Dp_h}{Dt}, \delta p_h \right) - \left( \beta \frac{DT_h}{Dt}, \delta p_h \right) = 0 \quad \forall \delta p_h \in S_h \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}_h, \delta \mathbf{u}_h) + \left( \rho \frac{D\mathbf{u}_h}{Dt}, \delta \mathbf{u}_h \right) - b(\delta \mathbf{u}_h, p_h) - (\mathbf{f}, \delta \mathbf{u}_h) \\
- \langle \hat{\mathbf{t}}, \delta \mathbf{u}_h \rangle_{\Gamma_N^u} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in V_h \quad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(T_h, \delta T_h) + \left( \frac{DT_h}{Dt}, \delta T_h \right) - \left( \frac{Dp_h}{Dt}, \delta T_h \right) - (\boldsymbol{\tau}_h : \nabla \mathbf{u}_h, \delta T_h) \\
- (q_h, \delta T_h) - \langle q_b, \delta T_h \rangle_{\Gamma_N^T} = 0 \quad \forall \delta T_h \in S_h \quad (3.6)
\end{aligned}$$

où :

$$(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) = \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{u}_h d\Omega \quad \forall \mathbf{u}_h \in V_h \quad (3.7)$$

$$a(\mathbf{u}_h, \delta \mathbf{u}_h) = \int_{\Omega} \left( 2\mu\epsilon_h - \frac{2}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}_h \right) : \nabla \delta \mathbf{u}_h d\Omega \quad \forall \mathbf{u}_h, \delta \mathbf{u}_h \in V_h \quad (3.8)$$

$$b(\delta \mathbf{u}_h, p) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u}_h \in V_h, q \in Q_h \quad (3.9)$$

$$d(T_h, \delta T_h) = \int_{\Omega} k \nabla T_h \cdot \nabla \delta T_h d\Omega \quad \forall T_h, \delta T_h \in S_h \quad (3.10)$$

Dans le cas de l'élément Taylor-Hood, les espaces approximés sont les suivants [11] :

$$\begin{aligned} V_h &= \{ \delta \mathbf{u} \in \mathbf{P}_2(k_e); \quad \delta \mathbf{u} \in \mathbf{C}_{\Omega}^0; \quad \delta \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_d^u \} \\ Q_h &= \{ \delta p \in P_1(k_e); \quad \delta p \in C_{\Omega}^0 \} \\ S_h &= \{ \delta T \in P_2(k_e); \quad \delta T \in C_{\Omega}^0; \quad \delta T = 0 \text{ sur } \Gamma_d^T \} \end{aligned}$$

Ces sous-espaces sont contenus dans leurs espaces continus respectifs. En se fiant aux définitions des sous-espaces, on peut décrire l'élément de Taylor-Hood de la façon suivante : la vitesse et la température sont approximées par des polynômes de degrés 2, qui doivent être continus sur les faces des éléments. La pression est approximée par un polynôme de degré 1 qui doit être continu. Afin de mieux illustrer l'élément, la figure 3.1 présente l'élément de Taylor-Hood.

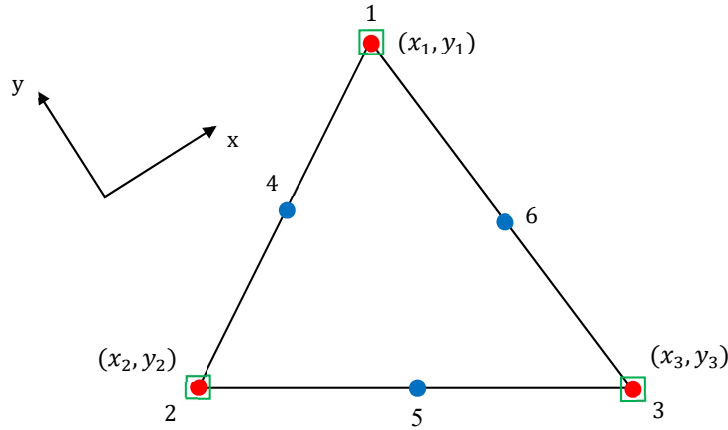


Figure 3.1 Élément de Taylor-Hood P2-P1 ©Muller (2017). Reproduit avec permission

Dans la figure 3.1, la vitesse et la température sont évaluées à tous les nœuds. C'est pour

cela qu'on réussit à construire des polynômes de degré 2 pour ces variables. La pression n'est évaluée qu'aux nœuds sommets (les nœuds en rouge). On forme ainsi des polynômes de degré 1 pour approximer la pression.

Maintenant, on approxime les variables de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u &\approx u_h = \sum_{j=1}^6 u_j \phi_j^u(\mathbf{x}) & T &\approx T_h = \sum_{j=1}^6 T_j \phi_j^T(\mathbf{x}) \\ v &\approx v_h = \sum_{j=1}^6 v_j \phi_j^v(\mathbf{x}) & p &\approx p_h = \sum_{k=1}^3 p_k \psi_k^p(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

où  $u_h$  est la solution approximée,  $u_j$  sont les valeurs nodales et  $\phi_j^u$  sont les fonctions d'interpolation. Notez que  $\{\phi_j(\mathbf{x})\}$ ,  $j = 1, \dots, 6$  et  $\{\psi_k(\mathbf{x})\}$ ,  $k = 1, 2, 3$  forment une base de leur sous-espace respectif.

Puis, on fait le choix d'utiliser la méthode de Galerkin qui consiste à utiliser les fonctions d'interpolation comme fonctions tests pour chaque variable. Les fonctions d'interpolation choisies vont évidemment être différentes pour chaque élément géométrique, ce qui n'est pas très pratique. On introduit alors le concept d'élément de référence. Il s'agit d'un élément régulier sur lequel on évaluera les intégrales (via la quadrature de Gauss-Legendre) de tous les autres éléments via une transformation de coordonnées. Il reste maintenant à construire et à résoudre la matrice globale.

### 3.1.3 Résolution

Le système matriciel global aura la forme suivante :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.11}$$

De par la présence des termes de convection non-linéaires dans les équations, on doit résoudre le système global par méthode itérative. Ainsi, on choisit la méthode de Newton afin de résoudre le système matriciel. Celle-ci se traduit par le système suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_R(\mathbf{x}^n) \delta \mathbf{x} &= -\mathbf{R}(\mathbf{x}^n) \\ \mathbf{x}^{n+1} &= \mathbf{x}^n + \delta \mathbf{x} \end{aligned}$$

où  $\mathbf{J}_R(\mathbf{x}^n)$  est la matrice jacobienne du résidu à l'itération  $n$ ,  $\delta\mathbf{x}$  est le vecteur de correction et  $\mathbf{R}(\mathbf{x}^n)$  est le résidu calculé à l'itération  $n$ . Les critères d'arrêt sont les suivants :

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \epsilon_x$$

$$\frac{\|\mathbf{R}(\mathbf{x}^n)\|}{\|\mathbf{R}(\mathbf{x}^0)\|} \leq \epsilon_R$$

Avec la méthode de Newton, le taux de convergence théorique est de 2 quand la matrice jacobienne est évaluée analytiquement. Or, pour des raisons pratiques, celle-ci est évaluée par différence finie. En conséquence, le taux de convergence de la méthode n'est plus tout à fait d'ordre 2. Or, le calcul du jacobien est couplé avec un algorithme de factorisation adaptative qui permet d'utiliser la même matrice jacobienne pour plusieurs itérations de Newton sans devoir la factoriser à chaque fois. Ainsi, le temps de calcul sauvé par la factorisation adaptative surpasse la perte d'efficacité qui provient du jacobien numérique. La matrice jacobienne n'est calculée (et factorisée) que quand la différence du résidu entre deux itérations n'est pas assez significative (la convergence n'est donc plus assez rapide avec la matrice jacobienne courante).

### 3.2 Les méthodes de type « Backward Differentiation Formula »

Dans cette section, on donne une brève description des méthodes BDF utilisées pour faire l'intégration en temps. On commence par présenter la formulation des BDF. Puis, on aborde les aspects adaptatifs de la méthode (en taille du pas d'intégration et en ordre) qui sont basés sur un estimateur d'erreur par troncature et un indicateur de stabilité. Les lecteurs curieux pourront consulter les références [12, 13] afin d'obtenir plus de détails sur la méthode.

Les méthodes BDF étant déjà implémentées dans le code de calcul, on avait déjà prouvé leur efficacité en incompressible [12]. Or, dans les équations compressibles, on doit résoudre l'équation d'énergie ainsi qu'une équation de continuité pour les fluides compressibles (comparativement à la contrainte d'incompressibilité). Ces deux équations contiennent les dérivées temporelles de la température et de la pression. Donc, on a fait l'ajout, aux méthodes BDF déjà implémentées, de l'évaluation des dérivées et de l'estimation d'erreur pour ces deux variables. La vérification de ces modifications sera faite dans la section 4.3.



### 3.2.1 Formulation des BDF

Le but de l'intégration en temps est de résoudre un problème aux valeurs initiales de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Pour définir les méthodes BDF, on commence par écrire la première équation du système (3.12) au temps  $t = t_{n+1}$  :

$$\mathbf{y}'(t_{n+1}) = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}(t_{n+1})) \quad (3.13)$$

La méthode BDF d'ordre  $p$  s'obtient en définissant un polynôme d'interpolation de Newton  $\mathbf{q}(t)$  de degré  $p$  en interpolant la solution aux temps  $t_j$  pour  $j = n+1, \dots, n+1-p$ . Ce polynôme est écrit en utilisant les différences divisées :

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=0}^p \left[ \prod_{i=0}^{j-1} (t - t_{n+1-i}) \right] \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^j \quad (3.14)$$

où le vecteur  $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^j$  est la différence divisée d'ordre  $j$  définie par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^0 = [\mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}] = \mathbf{y}_{n+1} \\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^j = \frac{[\mathbf{y}_{n+1}, \dots, \mathbf{y}_{n+2-j}] - [\mathbf{y}_n, \dots, \mathbf{y}_{n+1-j}]}{t_{n+1} - t_n} \end{cases} \quad (3.15)$$

L'avantage principal du système (3.15) est qu'il est construit par récurrence, ce qui rend le calcul des différences divisées très efficace.

Afin d'obtenir la dérivée temporelle, on doit dériver le polynôme  $\mathbf{q}(t)$  par rapport au temps :

$$\mathbf{q}'(t) = \sum_{j=1}^p \left[ \prod_{i=1}^{j-1} (t_{n+1} - t_{n+1-i}) \right] \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^j = \sum_{i=0}^p a_i \mathbf{y}_{n+1-i} \quad (3.16)$$

où les  $a_i$  sont les coefficients obtenus en appliquant les différences divisées.

La formule (3.16) correspond à l'estimation de la dérivée temporelle  $\mathbf{y}'(t_{n+1})$ . Ainsi, en substituant (3.16) dans (3.13) on obtient la méthode BDF implicite d'ordre  $p$  :

$$\sum_{i=0}^p a_i \mathbf{y}_{n+1-i} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}(t_{n+1})) \quad (3.17)$$

### 3.2.2 Aspects adaptatifs

#### Adaptation du pas de temps

L'adaptation du pas de temps se fait via un estimateur d'erreur de troncature locale. Le but de cette adaptation est de pouvoir utiliser le plus grand pas de temps possible à chaque itération afin d'optimiser les temps de calcul. L'erreur de troncature locale de l'équation (3.13) se définit par :

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}(t_{n+1})) = \mathbf{y}'(t_{n+1}) - \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}(t_{n+1})) \quad (3.18)$$

En suivant la démarche effectuée dans [13], on obtient une estimation de l'erreur de troncature locale :

$$\mathcal{L}_p(\mathbf{y}(t_{n+1})) \approx C_{p+1} \mathbf{y}^{(p+1)}(t_{n+1}) \quad (3.19)$$

où  $C_{p+1}$  est la constante d'erreur de la méthode : elle dépend de l'ordre  $p$  de la méthode BDF (plus l'ordre est grand, plus la constante est petite). De par l'estimation de l'erreur de troncature, on peut estimer l'erreur locale introduite par le dernier pas de temps :

$$\mathbf{e}_{n+1} \approx C_{p+1} \mathbf{y}^{(p+1)}(t_{n+1}) h_{n+1} \quad (3.20)$$

où  $h_{n+1} = (t_{n+1} - t_n)$ . Il est aussi possible de montrer que l'on peut approximer la dérivée d'ordre  $p+1$  de la solution comme [13]  $\mathbf{y}^{(p+1)}(t_{n+1}) \approx (p+1)! \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{p+1}$ .

Pour calculer le nouveau pas de temps optimal à partir de l'approximation (3.20), on introduit le *swing factor* :  $\mathcal{S} = \frac{h_{n+1}}{h_n}$ . Puisque les variables ne sont pas toutes du même ordre de grandeur, on calcule un *swing factor* pour chaque variable séparément :

$$\mathcal{S}_y = F_s \left( \frac{e_0^y}{e_{n+1}^y} \right)^{\frac{1}{p+1}} \quad (3.21)$$

où  $F_s$  est un facteur de sécurité,  $e_0^y$  est l'erreur cible pour la variable  $y$  et  $e_{n+1}^y$  est l'erreur estimée de la variable  $y$ . Puis, dans le cas des équations de Navier-Stokes compressibles (où les variables sont  $u, v, T, p$ ), le *swing factor* sera :

$$\mathcal{S} = \min\{\mathcal{S}_{max}, \mathcal{S}_u, \mathcal{S}_v, \mathcal{S}_T, \mathcal{S}_p\} \quad (3.22)$$

où  $\mathcal{S}_{max}$  est le *swing factor* maximal qui garantit la stabilité de la méthode BDF d'ordre  $p$ , tel que montré dans le tableau 3.1. Le pas de temps pour la prochaine itération sera donc :

$$h_{n+2} = \mathcal{S} h_{n+1} \quad (3.23)$$

## Adaptation de l'ordre

La raison pour laquelle on a besoin d'adapter en ordre, c'est que les méthodes BDF ne sont pas toujours stables. En effet, la *Seconde barrière de Dahlquist* dit qu'« il n'existe pas de méthode linéaire multi-pas et «A-stable» d'ordre strictement supérieur à 2 »[12]. Ainsi, une méthode BDF- $p$  (d'ordre  $p$ ) ne sera pas absolument stable si  $p > 2$ . On montre aussi que lorsque  $p > 6$ , les méthodes BDF sont inconditionnellement instables, ce qui les rend inutilisables [14]. Alors, si on veut profiter du meilleur taux de convergence des ordres supérieurs, il faut avoir un processus qui permet de choisir l'ordre  $p$  le plus élevé disponible tout en restant stable.

De plus, dans l'équation (3.22), on introduit la variable  $\mathcal{S}_{max}$ . Cette variable correspond au plus grand *swing factor* possible en fonction de l'ordre de la méthode BDF. Le tableau 3.1 présente les valeurs maximales  $\mathcal{S}_{max}$  en fonction de l'ordre  $p$  :

Tableau 3.1 Valeurs maximales  $\mathcal{S}_{max}$

$p$	2	3	4	5
$\mathcal{S}_{max}$	2.6	1.9	1.5	1.2

L'indicateur de stabilité utilisé pour faire l'adaptation en ordre est décrit dans [13]. En gros, on se base sur le fait que lorsqu'une méthode devient instable, la solution est souillée par des erreurs sous la forme d'oscillations de haute fréquence. Puisque ces termes d'erreurs sont plus facilement détectables dans les dérivées d'ordre supérieur, on utilise ces dernières pour détecter les instabilités. Ainsi, lorsque les termes des dérivées d'ordre supérieur deviennent plus grands que les autres termes d'ordre inférieur, on sait que la méthode devient instable. On juge la méthode BDF- $p$  stable lorsque la suite (3.24) est respectée :

$$\delta_{p-1} > \delta_p > \delta_{p+1} > \delta_{p+2} > \delta_{p+3} \quad (3.24)$$

où  $\delta_k = |h_{n+1}^k y^{(k)}(t_{n+1})| \approx |h_{n+1}^k k! \alpha_{n+1}^k|$ .

Si, pour les dix derniers pas de temps, au moins 50% des itérations respectent le critère de stabilité (3.24) pour l'ordre courant et l'ordre  $p + 1$ , le processus d'adaptation va augmenter l'ordre des méthodes BDF. Or, si le test échoue pour l'ordre courant, la méthode réduira l'ordre pour les 20 prochains pas de temps afin de limiter les changements d'ordres durant le calcul.

### 3.3 Adaptation de maillage

Dans cette section, on présente l'estimateur d'erreur ainsi que le processus général d'adaptation de maillage. Dans ce projet, l'adaptation du maillage en fonction de l'erreur n'est pas un aspect primordial. L'outil est vérifié dans le chapitre 4 pour des considérations futures, mais n'est pas utilisé ici. Or, dans le problème à surface libre de la section 5.2, on utilise un maillage qui s'adapte à la courbure et à la distance de l'interface. Alors, on présente aussi cet outil dans cette section.

#### 3.3.1 Adaptation en fonction de l'erreur estimée

Pour pouvoir faire l'adaptation du maillage, on a besoin de calculer l'erreur de discrétisation pour chacune des variables. Les normes utilisées afin de calculer les erreurs de chaque variable sont présentées par les équations (3.25)-(3.27).

$$e_{exa}^u = \|\mathbf{u}_{exa} - \mathbf{u}_h\|_{H1} = \left[ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon}_{exa} - \boldsymbol{\epsilon}_h) : (\boldsymbol{\epsilon}_{exa} - \boldsymbol{\epsilon}_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

$$e_{exa}^T = \|T_{exa} - T_h\|_{H1} = \left[ \int_{\Omega} (\nabla T_{exa} - \nabla T_h) \cdot (\nabla T_{exa} - \nabla T_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

$$e_{exa}^p = \|p_{exa} - p_h\|_{H1} = \left[ \int_{\Omega} (\nabla p_{exa} - \nabla p_h) \cdot (\nabla p_{exa} - \nabla p_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

où  $\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - \frac{2}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}$ .

Puisque la solution exacte  $Q$  n'est pas disponible (ni son gradient), l'idée derrière l'estimateur d'erreur est de construire un gradient continu de la solution globale  $(\nabla Q^*)$  à partir du gradient de la solution éléments finis  $\nabla Q_h$  (discontinu)[15, 16]. Pour ce faire, on construit un polynôme  $Q^*$  de degré supérieur pour chaque sous-domaine  $\Omega_P$  constitué des éléments entourant le sommet  $P$  en minimisant l'intégrale :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_P} (Q^* - Q_h)^2 d\Omega_P \quad (3.28)$$

Avec cette approximation, l'erreur estimée des équations (3.25)-(3.27) devient :

$$e_{est}^u = \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_h\|_{H^1} = \left[ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon}^* - \boldsymbol{\epsilon}_h) : (\boldsymbol{\epsilon}^* - \boldsymbol{\epsilon}_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

$$e_{est}^T = \|T^* - T_h\|_{H^1} = \left[ \int_{\Omega} (\nabla T^* - \nabla T_h) \cdot (\nabla T^* - \nabla T_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.30)$$

$$e_{est}^p = \|p^* - p_h\|_{H^1} = \left[ \int_{\Omega} (\nabla p^* - \nabla p_h) \cdot (\nabla p^* - \nabla p_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

Une fois l'estimation d'erreur obtenue, on peut effectuer l'adaptation du maillage en fonction de l'erreur. Pour piloter le raffinement, on doit prescrire une erreur cible à atteindre, ce que l'on fait avec l'équation (3.32) [17] :

$$e_{cible} = \frac{\zeta E_h}{\sqrt{N}} \quad (3.32)$$

où  $\zeta$  est le facteur de réduction,  $E_h$  est l'erreur globale d'une variable quelconque et  $N$  est le nombre de nœuds total dans le maillage.

Une fois l'erreur cible obtenue, on utilise  $e_{cible} = ch_{cible}^k$  pour trouver la taille de maille cible :

$$h_{cible} = \left( \frac{\zeta E_h}{e_h \sqrt{N}} \right)^{\frac{1}{k}} h_e \quad (3.33)$$

où  $e_h$  est l'erreur élémentaire avant remaillage et  $h_e$  est la taille élémentaire avant remaillage. Au final, le choix de la nouvelle taille élémentaire se fait comme suit :

$$h_e = \min(h_{cible}^u, h_{cible}^T, h_{cible}^p) \quad (3.34)$$

### 3.3.2 Adaptation en fonction de la distance à l'interface

Dans la section 5.2, on décrit le processus de suivi d'interface utilisé pour résoudre le problème diphasique. Celui-ci nécessite que le maillage soit aligné avec l'interface. Ainsi, afin de bien représenter les grandes déformations de l'interface, on combine un maillage pseudo-solide avec l'adaptation de maillage. La méthode pseudo-solide est décrite dans la section 3.4 tandis que la procédure d'adaptation est décrite ci-dessous. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [18].

En premier, il est important de mentionner que remailler en fonction de la position de l'interface revient à mailler là où l'erreur sera la plus importante. En effet, c'est tout près de

l'interface que les plus gros gradients sont présents et c'est au niveau de l'interface que les phénomènes à petites échelles se produisent. Donc, même si on ne fait pas l'adaptation directement en fonction de l'estimation d'erreur, on aura les mêmes régions raffinées par les deux méthodes.

Le mailleur utilisé est un mailleur frontal qui calcule la taille des éléments par le biais d'un maillage de fond.

La procédure de remaillage se fait en six étapes :

1. Pour chaque point du maillage de fond, on trouve le point d'interface le plus proche.
2. On trouve le point qui est le plus loin de l'interface. Puis, on calcule une distance normalisée  $d(X)$  pour tous les points avec  $d(X) \in [0, 1]$ .
3. Pour chaque sommet  $i$  sur l'interface, on calcule la courbure normale  $\kappa = 1/R_c$  où  $R_c$  est le rayon du cercle qui passe par les points  $i - 1, i, i + 1$ .
4. La courbure locale est relaxée en appliquant des moyennes pondérées par la distance entre les points consécutifs sur l'interface. Le but est d'obtenir une distribution de maillage régulière sur l'interface.
5. On calcule la taille de maille pour chaque élément d'interface :

$$h_\kappa = (h_{ref} - h_{min})(1 - 10 \tanh(\kappa)h_{ref})^{1/2} \quad (3.35)$$

où  $h_{ref}$  est la taille de maille de référence donnée par l'utilisateur et  $h_{min} = h_{ref}/10$ .

6. On calcule la taille de maille locale pour chaque point du maillage de fond basé sur la courbure du point le plus proche situé sur l'interface. La taille varie de  $h_\kappa$  à  $h_{max} = 4h_{ref}$  :

$$h(X) = h_\kappa + (h_{max} - h_\kappa)f(d(X)) \quad (3.36)$$

où  $f(x) = [0.5\{1 + \tanh(5(x/x_{ip} - 1))\}]^{1/2}$  est représenté à la figure 3.2 avec  $x_{ip} = 0.2$  la distance à la surface qui représente le point d'inflexion du raffinement.

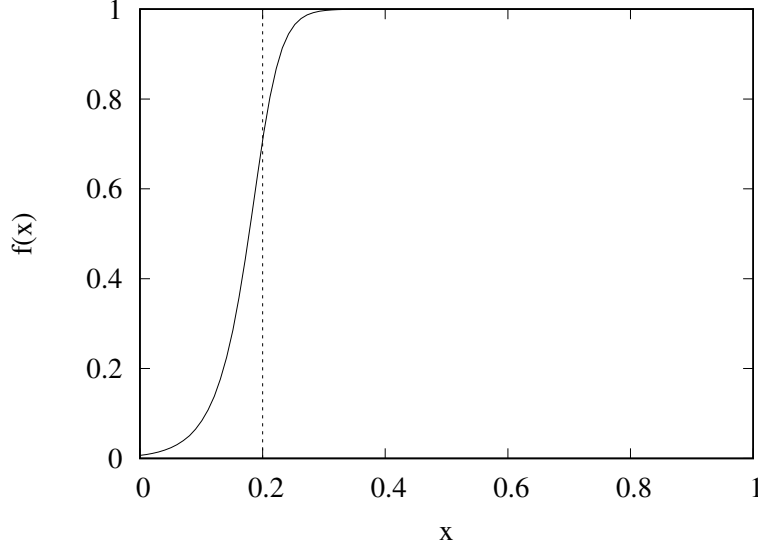


Figure 3.2 Fonction distance qui pilote le remaillage

### Génération du maillage dans le temps

Puisque la position de l'interface change dans le temps, on doit se définir des critères pour savoir quand remailler et activer la procédure décrite plus haut.

Les éléments du maillage pseudo-solide vont se déformer à chaque pas de temps. Or, lorsque l'interface se déforme, le maillage subit de grandes déformations et la solution éléments finis s'en retrouve détériorée. Pour remédier à la situation, on établit un critère sur la déformation maximale d'un élément ( $E_{max}$ ) pour relancer la procédure de maillage. La déformation de l'élément est calculée comme suit :

$$|E| = \mathbf{E} : \mathbf{E} \quad (3.37)$$

où  $\mathbf{E} = (\nabla \boldsymbol{\chi} + \nabla \boldsymbol{\chi}^T)/2$  et  $\boldsymbol{\chi}$  est le vecteur de déplacement du maillage.

Ainsi, on déclenchera le remaillage lorsque  $\max(|E|) > E_{max}$ .

### 3.4 Formulation ALE et maillage pseudo-solide

Dans cette section, on décrit brièvement la méthode employée pour faire déformer le maillage des problèmes traités au chapitre 5. Les détails sont abordés dans [19] et [20].

L'approche pseudo-solide pour déformer le maillage appartient à la classe des méthodes «Arbitrary Lagrangian-Eulerian» (ALE). Dans le chapitre 2, on utilise un référentiel Eulérien,

ce qui veut dire qu'on observe le comportement du fluide sur un domaine fixe, prédéfini. À l'inverse, lorsqu'on choisit un référentiel Lagrangien, on suit les particules fluides dans leur mouvement. Dans les méthodes ALE, on fait un choix de référentiel arbitraire qui ne représente pas nécessairement un référentiel Lagrangien ou Eulérien par rapport au mouvement du fluide [19].

L'idée derrière la formulation ALE est que le fluide et le maillage vont bouger avec une vitesse relative à un système de coordonnées. Cette formulation est utile pour les problèmes où le domaine se déforme, comme c'est le cas pour les problèmes du chapitre 5. En pratique, on veut que le maillage se déplace dans le temps pour nous permettre de suivre les déformations du domaine. Il est logique de choisir la vitesse ALE comme étant la vitesse de déplacement du maillage. On obtient ainsi le système d'équations modifié du système (2.26) :

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\alpha_r}{\alpha_r p_m + 1} \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla p_m \right) \\
&\quad - \frac{\beta_r}{\beta_r T_m + 1} \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla T_m \right) \\
\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p_m + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \rho \mathbf{f} \\
\rho c_p \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla T_m \right) &= \frac{1}{Re Pr} \nabla \cdot (k \nabla T_m) + r_{cw} \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \nabla p_m \right) \\
&\quad + r_\phi (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) + q \\
\rho &= \rho_r \frac{(\alpha_r p_m + 1)}{(\beta_r T_m + 1)}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

où  $\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t}$  est la vitesse ALE (égale à celle du maillage).

Maintenant, afin de propager les déformations du domaine dans tout le maillage, on emploie la méthode pseudo-solide. Celle-ci consiste à considérer le maillage comme un solide subissant des déformations élastiques dues aux contraintes. Ainsi, on résout une équation d'équilibre statique pour le maillage :

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{S} \tag{3.39}$$

où  $\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} - 2\mu \mathbf{E}$  et  $\mathbf{E} = (\nabla \boldsymbol{\chi} + \nabla \boldsymbol{\chi}^T)/2$ . Les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé et  $\lambda = \mu = 1$  afin d'obtenir un coefficient de poisson  $\nu = 0.25$ .

L'approche ALE présentée ici est la même qui est utilisée dans [21] et la formulation pseudo-solide est la même que dans [2]. Ainsi, l'approche a déjà fait ses preuves pour les écoulements à surface libre et on valide son bon fonctionnement par le problème de Bagnold présenté à la section 5.1.



## CHAPITRE 4 VÉRIFICATION

### 4.1 Méthode des solutions manufacturées

En calcul numérique, il est toujours nécessaire d'effectuer la *vérification* du code et des simulations avant d'effectuer la *validation* des simulations. La vérification est une activité purement mathématique. Elle sert à s'assurer que le code de calcul résout les équations mathématiques de la bonne façon. La validation, quant à elle, sert à montrer que les modèles utilisés sont les bons et que leurs prédictions concordent bien avec la réalité.

Dans ce chapitre, on se concentre sur la vérification du code. La meilleure façon de vérifier le code est d'utiliser des solutions exactes qui activent tous les termes des équations [22]. Puisque les solutions exactes des équations de Navier-Stokes sont rares et qu'elles sont trop simples pour bien vérifier le code, on doit se tourner vers la méthode des solutions manufacturées.

La méthode des solutions manufacturées (MMS) donne une procédure à suivre afin de générer une solution exacte qui permet d'effectuer la vérification. Comme le dit son nom, le but est de créer une solution sans se préoccuper du réalisme physique, puisque l'on cherche tout simplement à vérifier la bonne résolution des équations. L'idée générale est d'ajouter un terme source aux équations à résoudre qui a été calculé à partir de la solution analytique choisie.

Si  $\mathcal{L}(\mathbf{u}, T, p) = 0$  représente les équations de Navier-Stokes et  $(\mathbf{u}_m, T_m, p_m)$  la solution manufacturée choisie alors  $\mathcal{L}_m(\mathbf{u}_m, T_m, p_m) \neq 0$ . On aura plutôt  $\mathcal{L}_m(\mathbf{u}_m, T_m, p_m) = q_m$ . La solution manufacturée satisfera  $\mathcal{L}_m(\mathbf{u}_m, T_m, p_m) - q_m = 0$ . Le terme source garantit que  $(\mathbf{u}_m, T_m, p_m)$  sera solution de  $\mathcal{L}_m(\mathbf{u}_m, T_m, p_m) = 0$ .

Pour calculer ce terme source on doit, à l'aide d'un calculateur symbolique ou non, trouver l'expression de toutes les dérivées qui se retrouvent dans les équations à résoudre. Puis, en passant la solution (avec ses dérivées) dans le système d'équations à résoudre, on obtient l'expression du terme source pour chaque équation.

Dans cette section, on abordera un problème stationnaire compressible qui nous permettra de vérifier les termes en espace et un problème instationnaire compressible qui nous permettra de vérifier si les termes temporels sont bien implémentés.

## 4.2 Couche limite compressible 2D

La solution analytique compressible présente bien les caractéristiques d'une couche limite adiabatique sur une plaque plane. Elle a été construite à partir d'un cas étudié par [23].

### 4.2.1 Description du problème

La solution manufacturée choisie est la suivante :

$$\begin{aligned}
 u_m &= U_0 \frac{(1 - e^{-\epsilon})}{\rho} \\
 v_m &= U_0 \frac{\frac{\delta}{2x} [1 - e^{-\epsilon} (1 + \epsilon)]}{\rho} \\
 p_m &= 0 \\
 T_m &= \frac{\gamma_r - 1}{2} M_r^2 \left[ 1 - (1 - e^{-\epsilon})^2 \right] \\
 \rho_m &= \frac{1}{T + 1}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

où  $\delta = \sqrt{\frac{x}{Re}}$  et  $\epsilon = \frac{y}{\delta}$ .

Les paramètres utilisés pour les calculs sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 Re &= 1000 \\
 U_0 &= 1 \\
 Pr &= 0.7 \\
 \gamma_r &= 1.4 \\
 M_r &= 0.7
 \end{aligned}$$

sur le domaine rectangulaire suivant :  $[0.2; 1.0] \times [0.0; 1.0]$  (les dimensions sont en mètres).

Afin d'obtenir la solution analytique, les termes sources suivants sont ajoutés :

— Mouvement :

$$\mathbf{f}_m = \rho_m (\mathbf{u}_m \cdot \nabla) \mathbf{u}_m + \nabla p_m - \nabla \cdot \left[ \mu_m (\nabla \mathbf{u}_m + \nabla \mathbf{u}_m^T) - \frac{2}{3} \mu_m \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}_m \right] \tag{4.2}$$

— Énergie :

$$q_m = \rho_m c_{p_m} \mathbf{u}_m \cdot \nabla T_m - r_{cw} \mathbf{u}_m \cdot \nabla p_m - \nabla \cdot (k \nabla T_m) \tag{4.3}$$

Les conditions limites sont tirées de la solution manufacturée directement. Donc, des conditions de Dirichlet sont employées pour  $u$ ,  $v$  et  $T$  à l'entrée (côté gauche), en bas (la plaque plane) et en haut. À la frontière de droite (la sortie), des conditions de Neumann sont appliquées sur  $u$ ,  $v$  et  $T$ .

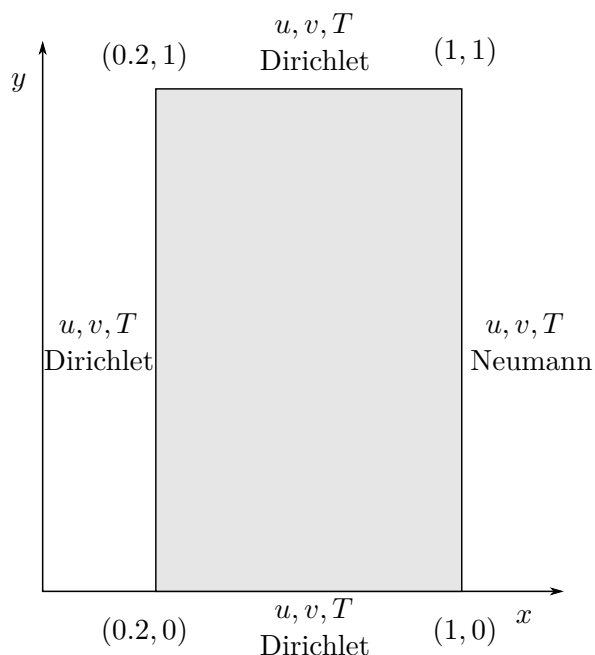


Figure 4.1 Géométrie et conditions limites

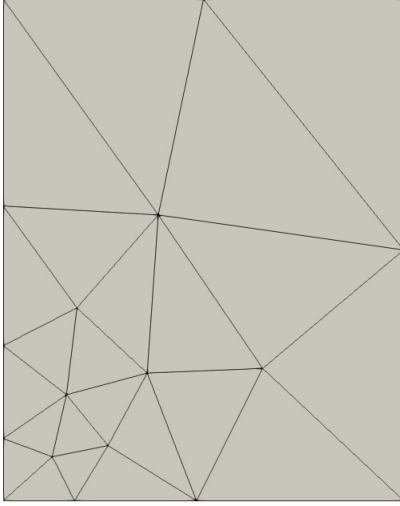
#### 4.2.2 Étude de convergence

On a effectué une analyse de convergence par raffinement de maillage afin de vérifier les points suivants :

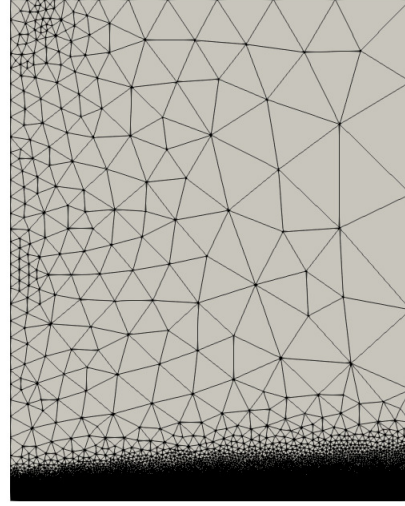
- la précision de la solution éléments finis ;
- la bonne adaptation du maillage ;
- la précision de l'estimateur d'erreur.

L'adaptation de maillage s'est faite en visant à réduire l'erreur pour chacune des variables. C'est-à-dire que l'erreur est calculée pour la vitesse, la pression et la température, et que le processus d'adaptation va tenter de réduire l'erreur en choisissant une taille de maille définie par la plus grande erreur estimée des trois variables.

Afin de mieux visualiser l'adaptation qui est faite, la figure 4.2 représente les maillages initial et final de la solution manufacturée.



(a) Maillage initial



(b) Maillage final

Figure 4.2 Maillages initial et final de la solution manufacturée

À première vue, on peut voir que l'adaptation est bien faite, car la solution manufacturée représente une couche limite. C'est alors bien normal de retrouver beaucoup d'éléments près de la paroi du bas.

De façon plus formelle, les résultats de l'étude de convergence sont montrés au tableau 4.1 et à la figure 4.3. Dans le tableau 4.1,  $e_{exa}^u$  représente l'erreur exacte pour la variable  $\mathbf{u}$  et  $e_{est}^u$  son erreur estimée. Celles-ci ont été calculées à l'aide des normes définies dans la section 3.3.

Tableau 4.1 Erreurs exactes et estimées

Noeuds	$e_{exa}^u$	$e_{est}^u$	$e_{exa}^T$	$e_{est}^T$	$e_{exa}^p$	$e_{est}^p$
58	7.8737E+000	8.5335E-001	3.5198E-001	5.7787E-002	2.4061E-001	7.2382E-002
106	6.8984E+000	1.1180E+000	3.0534E-001	6.9263E-002	1.5873E-001	5.2222E-002
167	4.9799E+000	1.3806E+000	2.0103E-001	5.2594E-002	9.8563E-002	3.6445E-002
321	3.0715E+000	1.0341E+000	1.5578E-001	3.5820E-002	5.5679E-002	2.0698E-002
552	1.2542E+000	7.1620E-001	1.2494E-001	4.8948E-002	1.6974E-002	5.9713E-003
1142	4.1454E-001	3.3983E-001	6.6315E-002	3.8415E-002	4.3843E-003	1.6845E-003
2455	1.4897E-001	1.3816E-001	2.3877E-002	1.8362E-002	1.9994E-003	1.0326E-003
5582	6.1487E-002	5.8245E-002	7.8719E-003	6.9052E-003	1.0789E-003	5.3637E-004
12915	2.7037E-002	2.6172E-002	3.1922E-003	3.0010E-003	5.8875E-004	3.0544E-004
29652	1.1186E-002	1.1031E-002	1.3950E-003	1.3515E-003	3.3438E-004	1.7718E-004
68527	4.6966E-003	4.6707E-003	5.9774E-004	5.8989E-004	2.0858E-004	1.1342E-004
160738	1.9807E-003	1.9853E-003	2.5268E-004	2.5248E-004	1.2934E-004	7.0957E-005
384214	8.2146E-004	8.2637E-004	1.0556E-004	1.0619E-004	9.1358E-005	4.6712E-005

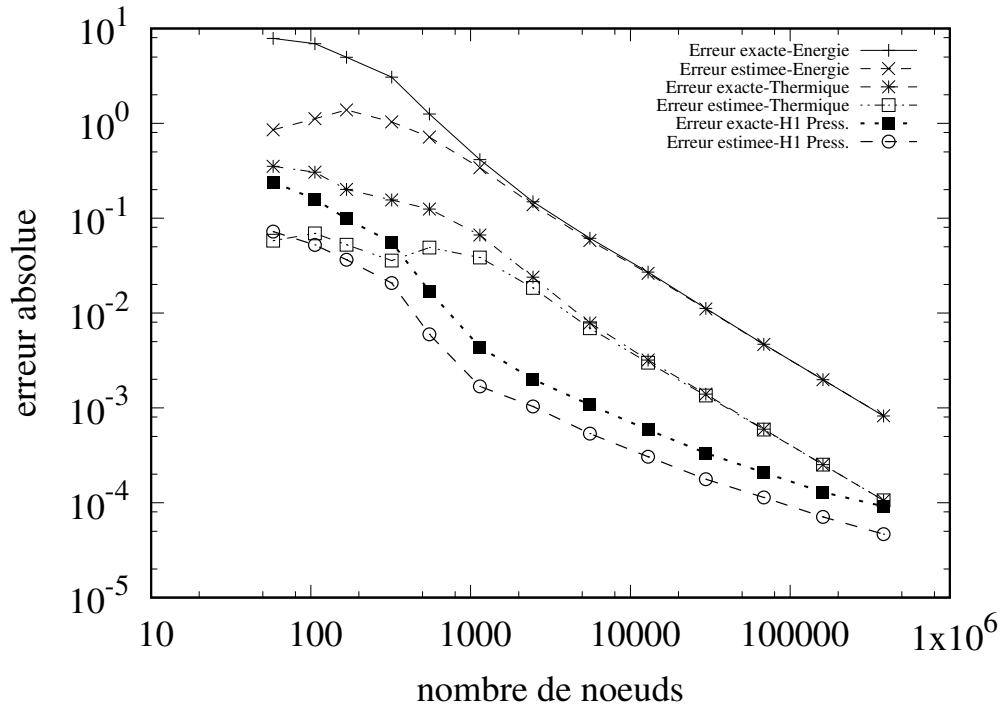


Figure 4.3 Courbes de convergence

En se fiant aux valeurs du tableau 4.1, on peut voir que l'erreur diminue bien à chaque remaillage. De plus, on atteint des valeurs faibles de l'erreur exacte pour les trois variables concernées, ce qui montre que la solution éléments finis est précise et converge bien vers la solution exacte.

En examinant la figure 4.3, on peut voir que les courbes d'erreurs estimées convergent bien vers les courbes d'erreurs exactes lorsqu'on raffine le maillage. On dit alors que l'estimateur d'erreur est asymptotiquement exact. En pratique, cela signifie que le raffinement de maillage améliore la précision de la solution éléments finis et que l'estimateur est de plus en plus quantitatif avec le raffinement. Or, on remarque aussi qu'il y a un écart sensiblement constant entre les courbes d'erreurs pour la pression. Ceci s'explique par le fait que la pression exacte est nulle dans tout le domaine, ce qui fait que la solution numérique calculée correspond à l'erreur absolue sur la pression. Et c'est en effectuant la projection sur une autre base (lors du processus d'estimation) que le décalage est introduit [24].

Maintenant, on va calculer les taux de convergence des solutions afin de montrer que ceux-ci concordent bien avec la théorie présentée à la section 3.1.2.

Le taux de convergence peut être calculé avec la formule suivante :

$$||e|| = ch^k \quad (4.4)$$

où  $c$  est une constante,  $h$  est la taille des éléments et  $k$  est l'ordre de convergence.

Si on prend le logarithme de l'équation (4.4) on a :

$$\log(e) = \log(c) + k \log(h) \quad (4.5)$$

Ainsi, on obtient une relation linéaire entre l'erreur et la taille de maille lorsque l'on prend le logarithme, comme on peut l'observer dans la figure 4.3. Il ne nous reste plus qu'à calculer la pente afin de trouver l'ordre de convergence en faisant l'hypothèse que  $\log(c) = 0$  :

$$k = \frac{\log(e_2) - \log(e_1)}{\log(h_2) - \log(h_1)} = \frac{\log(\frac{e_2}{e_1})}{\log(\frac{h_2}{h_1})} \quad (4.6)$$

où les indices dénotent deux points différents dans le graphique.

Or, dans la figure 4.3, l'erreur est tracée en fonction du nombre de points. On peut alors définir une taille de maille de référence en posant :

$$h_r = \sqrt{\frac{1}{N}} \quad (4.7)$$

où  $N$  est le nombre de noeuds.

On peut alors transformer l'équation (4.6) :

$$k = \frac{\log(\frac{e_2}{e_1})}{\log(\sqrt{\frac{N_1}{N_2}})} \quad (4.8)$$

En calculant chacune des pentes on obtient :

— Pour  $u$  :

$$k = 2.00$$

— pour  $T$  :

$$k = 2.02$$

— pour  $p$  :

$$k = 1.12$$

En théorie, on s'attend à ce que le taux de convergence de l'erreur pour la vitesse et la température soit en  $O(h^2)$  et celle de la pression soit en  $O(h)$  à cause de l'élément choisi et des normes utilisées pour calculer l'erreur. Dans notre cas, les pentes calculées reflètent bien la théorie car chacun des taux de convergence se rapproche du taux de convergence théorique de l'élément.

Donc, on a montré les trois points qu'on voulait prouver : la précision de la solution, la bonne adaptation du maillage et la précision de l'estimateur d'erreur. Alors, on peut affirmer que le code de calcul est vérifié pour les termes spatiaux en régime compressible.

### 4.3 Écoulement de Poiseuille compressible instationnaire

Dans la section 4.2, on a montré que le code est capable de bien résoudre les équations en espace. Maintenant, on veut s'assurer que le code converge aussi en temps, puisque les cas étudiés dans la section 5 sont instationnaires. On veut aussi tester que l'ajout des termes instationnaires dans la formulation compressible a été bien implémenté.

Le problème choisi a été étudié par [12] pour un fluide incompressible. On l'a modifié afin d'y ajouter les termes compressibles. Pour ce faire, on a ajouté un terme source dans l'équation de continuité afin de satisfaire la continuité dans le cas d'un fluide compressible.

### 4.3.1 Description du problème

La solution manufacturée choisie est la suivante :

$$\begin{aligned}
 u_m &= U_0(-6y^2 + 6y) \\
 v_m &= 0 \\
 p_m &= (-0.1x)(1 + 0.2 \sin(t)) \\
 T_m &= (-6y^2 + 6y + 1)(1 + 0.2 \sin(t)) \\
 \rho_m &= \rho_r \frac{(\alpha_r p_m + 1)}{(\beta_r T_m + 1)}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Les paramètres utilisés pour les calculs sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 Re &= 500 \\
 U_0 &= 1 \\
 Pr &= 0.7 \\
 \gamma_r &= 1.4 \\
 M_r &= 0.5
 \end{aligned}$$

sur le domaine rectangulaire suivant :  $[0.0; 1.0] \times [0.2; 1.0]$  (les dimensions sont en mètres).

Afin d'obtenir la solution analytique, les termes sources suivants sont ajoutés :

— Continuité :

$$\begin{aligned}
 S_c &= \nabla \cdot \mathbf{u}_m + \frac{\alpha_r}{(\alpha_r p_m + 1)} \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{u}_m \cdot \nabla p_m \right) \\
 &\quad - \frac{\beta_r}{(\beta_r T_m + 1)} \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_m \right)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

— Mouvement :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_m &= \rho_m \left( \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} + \mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m \right) + \nabla p_m \\
 &\quad - \nabla \cdot \left[ \mu_m (\nabla \mathbf{u}_m + \nabla \mathbf{u}_m^T) - \frac{2}{3} \mu_m \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}_m \right]
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

— Énergie :

$$q_m = \rho_m c_{p_m} \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u}_m \cdot \nabla T_m \right) - r_{cw} \mathbf{u}_m \cdot \nabla p_m - \nabla \cdot (k \nabla T_m) \tag{4.12}$$

Les conditions limites sont tirées de la solution manufacturée. Ainsi, on retrouve des conditions de Dirichlet sur tous les bords du domaine pour les variables  $u, v$  et  $T$ . La figure 4.4 représente le domaine et les conditions limites associées.



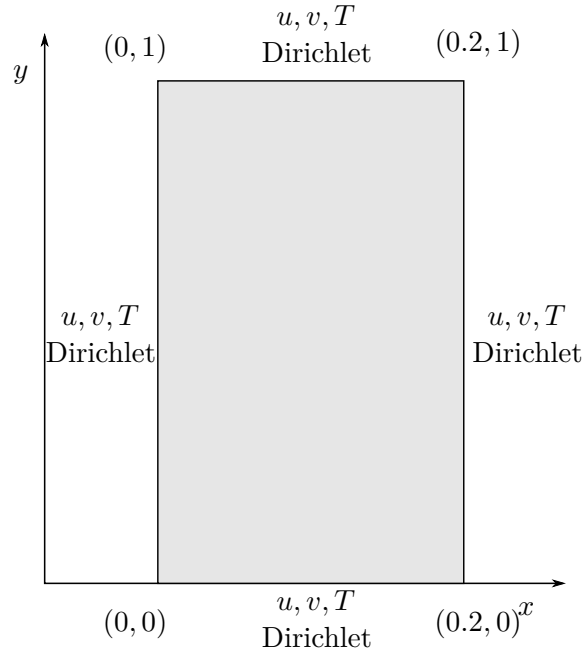


Figure 4.4 Géométrie et conditions limites

### 4.3.2 Étude de convergence

Pour effectuer l'étude de convergence, on simule le problème décrit pour chaque BDF- $p$  sur une durée de  $6.4s$  (un peu plus d'une période de sinus) avec quatre nombres de pas de temps  $N_{step}$  : 100, 500, 1000 et 2250. Ainsi, on peut calculer l'erreur pour chaque méthode BDF pour pouvoir observer si le taux de convergence des BDF- $p$  est respecté (une méthode BDF- $p$  doit converger à l'ordre  $p$ ). Dans cette étude, les méthodes BDF d'ordre 1 à 5 sont testées, mais seulement les ordres 1 à 3 sont montrés car les autres s'avèrent instables pour ce problème.

Quand on calcule l'erreur par rapport à l'erreur exacte au temps  $t = 6.4s$ , celle-ci représente la combinaison de l'erreur temporelle et de l'erreur spatiale. Or, le but de cette étude est de tester l'erreur temporelle. Dans cet ordre d'idée, on veut réduire l'erreur spatiale le plus possible, ce qui mène aux choix suivants :

- Pour  $u$  et  $T$ , la solution est un polynôme d'ordre 2 en  $y$ , qui est interpolée exactement pour l'élément de Taylor-Hood. Dans le même sens, la pression est linéaire en  $x$ .
- Puisque l'écoulement est développé en  $x$ , le domaine choisi est élancé dans la direction  $y$ .
- Le maillage est beaucoup plus fin en dans la direction  $y$  que dans la direction  $x$ , car la solution varie le plus en  $y$ . La figure 4.5 présente le maillage utilisé.
- On utilise 42 points d'intégration de Gauss pour l'évaluation des intégrales sur l'élé-

ment de référence.

Normalement, deux éléments P2-P1 représentent exactement la solution recherchée pour un domaine rectangulaire. En effet, la variation en  $y$  est polynomiale d'ordre 2 (vitesse et température) et la variation en  $x$  est polynomiale d'ordre 1 (la pression). Or, on utilise un maillage beaucoup plus fin, car l'équation d'état est rationnelle plutôt que polynomiale. Donc, on ne peut pas représenter exactement  $\rho$ , ce qui nous pousse à avoir un maillage plus fin pour diminuer le plus possible l'erreur spatiale. Dans le même ordre d'idée, on utilise 42 points de Gauss pour l'intégration pour avoir une approximation avec le polynôme d'ordre le plus élevé possible afin d'obtenir la plus petite erreur spatiale possible.

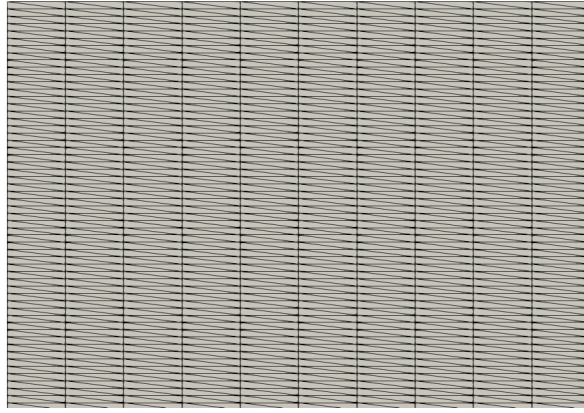
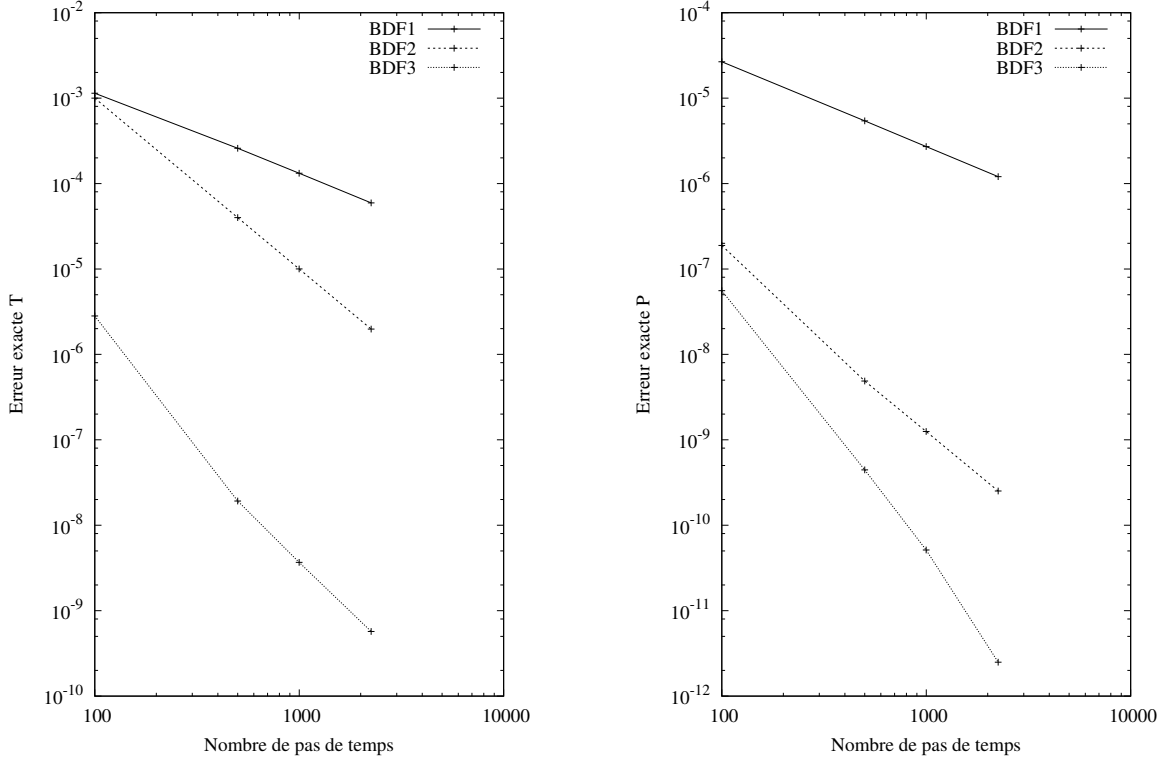


Figure 4.5 Zoom du maillage sur le haut du domaine

Dans cette solution, on fait le calcul de l'erreur sur  $T$  et  $p$ , car ce sont les variables pour lesquelles les méthodes BDF n'avaient pas encore été testées. Aussi, on a testé la solution en ajoutant une dépendance en temps sous la forme d'un sinus (comme les autres variables) pour la variable  $u$ . Par contre, l'oscillation de  $u$  en temps semblait créer des ondes de pression dans le domaine qui s'accumulaient avec le temps. N'étant pas capable de trouver la cause exacte et de régler le problème, on a décidé de retirer la dépendance en temps pour  $u$  pour éviter la propagation d'ondes de pression non désirables dans la solution manufacturée. Ceci étant dit, la figure 4.6 présente les taux de convergence d'erreur pour les variables de température et de pression pour les différents BDF- $p$ .



(a) Convergence des BDF pour la température (b) Convergence des BDF pour la pression

Figure 4.6 Taux de convergence des BDF

À première vue, la figure 4.6 semble donner de bons résultats. En effet, on voit que plus la méthode BDF est d'ordre élevé, plus la pente est élevée. Aussi, plus la méthode est d'ordre élevé, plus l'erreur exacte est petite. Le taux de convergence de chaque méthode a été évalué de la même façon que dans la solution manufacturée de la section 4.2, c'est-à-dire qu'on cherche le coefficient  $k$  tel que

$$\|e\| = ch^k \quad (4.13)$$

où  $h = N_{step}$ .

Le tableau 4.2 montre les taux de convergence calculés pour les BDF-1 à BDF-3 de la température et de la pression.

Tableau 4.2 Taux de convergence  $k$  des méthodes BDF pour les variables  $T$  et  $p$ 

	<b>BDF-1</b>	<b>BDF-2</b>	<b>BDF-3</b>
$T$	0.95	2.00	2.75
$p$	0.99	2.13	3.18

En se fiant au tableau 4.2, on voit que les taux de convergence concordent relativement bien avec la théorie.

Pour finir, on a montré que les méthodes BDF pour la température et la pression en écoulement compressible sont vérifiées. Or, cette étude est limitée par le fait que la vitesse ne dépendait pas du temps, même si cette composante avait déjà été vérifiée dans [12]. Comme expliqué plus haut, un phénomène se produit où on observait des ondes de pression se développer dans le domaine et qui devenaient de plus en plus importantes à cause des conditions limites qui agissent comme un « mur » réfléchissant les ondes de pression.

Un autre point important est le comportement de l'algorithme d'adaptation du pas de temps en fonction de la pression. Dans un autre cas étudié (mais pas présenté dans ce travail), on observe qu'en présence d'ondes de pression, l'algorithme adaptatif tend à réduire le pas de temps à des valeurs plus petites que  $10^{-5}$ . Ce comportement montre que l'algorithme fonctionne bien, puisque les ondes de pression se propagent à la vitesse du son obligeant ainsi le pas de temps à diminuer énormément pour capter ces ondes. Or, en spécifiant un pas de temps minimal plus élevé (de l'ordre de  $10^{-4}$ ), on obtenait des résultats tout aussi satisfaisants. C'est pourquoi on a décidé, pour des raisons d'efficacité, de ne pas estimer l'erreur temporelle sur la pression dans les cas traités au chapitre 5.

## CHAPITRE 5 APPLICATIONS

Dans ce chapitre, on veut appliquer les modifications apportées au code sur un cas réel. Cependant, avant de se lancer dans un tel problème, on étudie d'abord un cas simple : le problème de Bagnold en 1D qui décrit le comportement d'une masse de gaz comprimée par un liquide incompressible. Ce problème nous semble pertinent de par sa ressemblance au cas réel étudié par la suite (section 5.2) qui simule le déferlement d'une vague emprisonnant une poche de gaz.

### 5.1 Problème de Bagnold

Dans cette section, on compare les résultats du problème de Bagnold [25, 26] obtenus avec *matlab* avec les résultats générés par notre solveur Navier-Stokes.

#### 5.1.1 Description du problème

Le problème de Bagnold modélise la compression 1D d'une poche de gaz par une masse de liquide. Ce problème a été étudié par plusieurs auteurs [1, 4, 26] afin de mieux comprendre les enjeux de mise à l'échelle dans l'étude d'une vague qui emprisonne une poche de gaz.

Le problème tel que décrit par Bagnold [25] est montré à la figure 5.1.

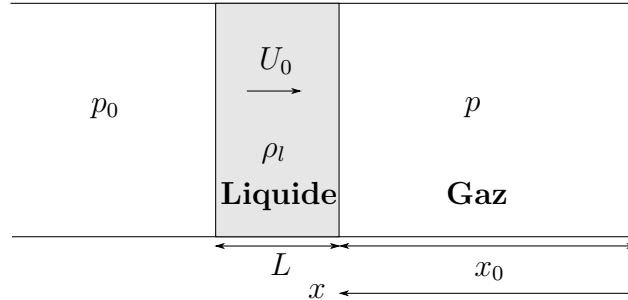


Figure 5.1 Modèle du piston de Bagnold en 1D [1]

Dans ce problème, le liquide de masse volumique  $\rho_l$  et de longueur  $L$  comprime le gaz sur le mur de droite avec une vitesse initiale  $U_0$ . La pression externe est  $p_0$  et on étudie la pression  $p$  dans la poche de gaz.

Dans notre cas, on a quelque peu modifié le problème afin de faciliter la résolution. En effet,

il n'était pas trivial d'imposer une vitesse initiale sur le piston puisque cela générerait un saut dans les conditions limites au premier pas de temps. Alors, afin de simplifier cette condition limite, on a imposé une vitesse initiale nulle tout en laissant tomber la masse sous l'effet de la gravité. Aussi, on a remplacé le liquide par une simple paroi solide afin d'éviter de déclencher des instabilités de Rayleigh-Taylor causées par le grand ratio de masse entre l'eau et l'air. Le problème de Bagnold modifié est représenté par la figure 5.2.

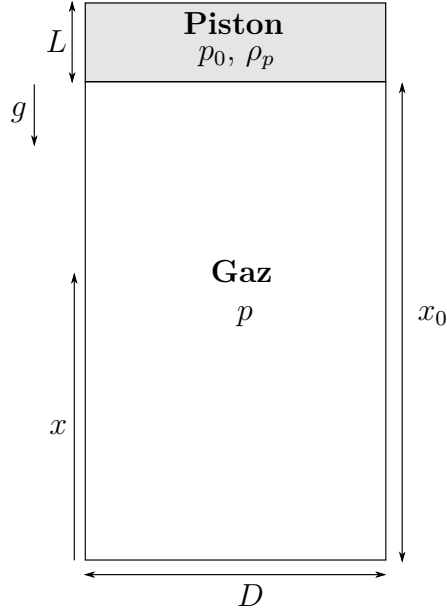


Figure 5.2 Modèle du piston modifié en 1D

Dans notre représentation, le piston est modélisé par la frontière du haut du domaine. Ici,  $\rho_p$  représente la masse volumique du piston en  $[\frac{kg}{m^3}]$ ,  $D$  le diamètre du piston (qui est comme la largeur d'un rectangle puisqu'on est en 2D) en  $[m]$  et  $g$  la gravité en  $[\frac{m}{s^2}]$ . Les autres variables sont les mêmes que dans la figure 5.1.

### 5.1.2 Modèle de Bagnold

Dans cette section, on va présenter l'équation qui est résolue dans *matlab* afin de comparer le résultat avec celui de notre code Navier-Stokes. L'équation (5.1) est basée sur [25], mais elle a été modifiée quelque peu afin d'y introduire la gravité.

Les variables dépendantes qu'on cherche à déterminer sont la position du piston  $x$  ainsi que  $p$ , la pression de l'air dans le cylindre.

L'équation régissant le mouvement du piston est :

$$\rho_p L \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + g \right) = (p - p_0) \quad (5.1)$$

avec  $x(0) = x_0$  et  $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ .

En considérant le processus comme isentropique et en faisant l'hypothèse d'un gaz parfait, on peut déduire la pression  $p$  de l'air pour toute position du piston :

$$p = p_0 \left( \frac{x_0}{x} \right)^\gamma \quad (5.2)$$

En substituant (5.2) dans l'équation (5.1) on obtient l'équation finale à résoudre :

$$\rho_p L \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + g \right) = p_0 \left( \frac{x_0}{x} \right)^\gamma - p_0 \quad (5.3)$$

avec  $x(0) = x_0$  et  $\frac{dx}{dt}(0) = 0$

### Adimensionnalisation du modèle

On introduit les variables adimensionnelles suivantes :

$$\tilde{x} = \frac{x}{x_c} \qquad \tilde{t} = \frac{t}{t_s}$$

où l'échelle de temps est  $t_s = x_c/U_c$  où  $x_c$  correspond à une longueur caractéristique et  $U_c$  une vitesse caractéristique.

Ici,  $x_c = x_e$ , c'est-à-dire la position du piston à l'équilibre et  $U_c = \sqrt{2g(x_0 - x_e)}$ , la vitesse du piston en chute libre après une chute de  $(x_0 - x_e)$  mètres.

On obtient alors le modèle adimensionnel suivant :

$$S \left( \frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{t}^2} + \frac{x_e}{2(x_0 - x_e)} \right) = \left( \frac{x_0}{\tilde{x}x_e} \right)^\gamma - 1 \quad (5.4)$$

où  $S = 2g(x_0 - x_e) \frac{\rho_p L}{x_e p_0}$  est le *nombre d'impact*.

Maintenant que le modèle *matlab* est adimensionnalisé, on va faire une analyse dimensionnelle complète du problème de Bagnold afin de savoir si les équations de Navier-Stokes du système adimensionné (2.20) contiennent les regroupements adimensionnels qui se retrouvent dans le problème de Bagnold.

### 5.1.3 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet d'identifier des nombres sans dimension caractérisant les phénomènes physiques qui influencent le comportement d'un système donné. Ainsi, avant même de résoudre un problème, elle nous permet de se faire une idée de ce à quoi devrait ressembler la solution.

Pour ce faire, on va utiliser le théorème  $\pi$ -Buckingham afin de trouver les nombres sans dimension qui régissent le modèle de Bagnold.

#### Étape 1

La première étape consiste à identifier toutes les variables qui peuvent influencer le problème. Le tableau 5.1 présente tous ces paramètres physiques. Leur description et leur dimension (selon les quatre grandeurs de base) sont aussi montrées afin de mieux situer le problème.

Tableau 5.1 Variables représentant le problème de Bagnold

Variable	Description	Dimension
$D$	Diamètre	$M^0 L^1 T^0 \Theta^0$
$x_e$	Hauteur d'équilibre	$M^0 L^1 T^0 \Theta^0$
$m_p$	Masse linéique du piston	$M^1 L^{-1} T^0 \Theta^0$
$\rho_a$	masse volumique de l'air	$M^1 L^{-3} T^0 \Theta^0$
$\mu_a$	Viscosité de l'air	$M^1 L^{-1} T^{-1} \Theta^0$
$k_a$	Conductivité thermique de l'air	$M^1 L^1 T^{-3} \Theta^{-1}$
$\gamma_a$	Rapport des chaleurs spécifiques	-
$T$	Température de l'air	$M^0 L^0 T^0 \Theta^1$
$P$	Pression de l'air	$M^1 L^{-1} T^{-2} \Theta^0$
$U_e$	Vitesse du piston à l'équilibre	$M^0 L^1 T^{-1} \Theta^0$
$t$	Temps	$M^0 L^0 T^1 \Theta^0$
$g$	accélération gravitationnelle	$M^0 L^1 T^{-2} \Theta^0$

Les grandeurs de base pour ce cas-ci sont : la masse (M) en [kg], la longueur (L) en [m], le temps (T) en [s] et la température thermodynamique ( $\Theta$ ) en [K]. On peut alors former les unités des variables présentes dans le tableau par une combinaison de multiplications et de



puissances de ces quatre grandeurs. Par exemple, si on prend la masse volumique de l'air  $\rho_a$ , on aura les unités suivantes :

$$\begin{aligned} M^1 &= kg \\ L^{-3} &= \frac{1}{m^3} \\ T^0 &= 1 \\ \Theta^0 &= 1 \\ \text{et } kg \cdot \frac{1}{m^3} \cdot 1 \cdot 1 &= \frac{kg}{m^3} \end{aligned}$$

ce qui donne bel et bien l'unité de la masse volumique.

## Étape 2

La deuxième étape consiste à identifier quatre variables répétées (autant que le nombre de grandeurs de base) qui vont servir à former les différents regroupements adimensionnels. Le choix de ces variables se fait parmi celles identifiées dans le tableau 5.1. Dans ce cas-ci, les variables choisies sont :  $\rho_a, x_e, U_e$  et  $T$ . Ces variables sont choisies car ensemble, elles contiennent toutes les grandeurs de base et qu'elles sont linéairement indépendantes.

Le théorème de Buckingham nous donne le nombre de regroupements adimensionnels qu'il y aura :  $i = n - k$  où  $i$  est le nombre de groupes,  $n$  est le nombre de variables physiques et  $k$  est le nombre d'unités fondamentales (grandeurs de base). En appliquant la formule pour ce problème, on a  $i = 12 - 4 = 8$  regroupements adimensionnels à trouver.

## Étape 3

La troisième étape sert à identifier ces regroupements. Ainsi, pour les variables restantes (celles qui ne sont pas choisies comme variable répétée), on effectue la démarche présentée ci-dessous. À titre d'exemple, on utilise le groupement adimensionnel correspondant à  $\mu_a$ .

La formule pour trouver un nombre sans dimension est la suivante :

$$\Pi_1 = \mu_a \cdot x_e^a U_e^b \rho_a^c T^d \quad (5.5)$$

À partir de cette formule, on veut créer un système d'équations qui va permettre de trouver les valeurs des exposants  $a, b, c, d$  qui annulent l'unité de la variable choisie. Donc, pour la viscosité  $\mu_a$ , on peut réécrire l'équation (5.5) sous la forme des grandeurs de base :

$$\Pi_1 = M^1 L^{-1} T^{-1} \cdot L^a \cdot L^b T^{-b} \cdot M^c L^{-3c} \cdot \Theta^0 \quad (5.6)$$

Avec l'équation (5.6), on peut construire le système d'équations (5.7) en annulant la somme des exposants pour chaque unité fondamentale ( $M, L, T, \theta$ ) :

$$\begin{aligned}
 M : 0 &= 1 + c \\
 L : 0 &= -1 + a + b - 3c \\
 T : 0 &= -1 - b \\
 \Theta : 0 &= d
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

En résolvant le système (5.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
 a &= -1 \\
 b &= -1 \\
 c &= -1 \\
 d &= 0
 \end{aligned}$$

En remplaçant la solution dans l'équation (5.6), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= M^1 L^{-1} T^{-1} \cdot L^{-1} \cdot L^{-1} T^1 \cdot M^{-1} L^3 \cdot \Theta^0 \\
 &= \mu_a \cdot x_e^{-1} \cdot U_e^{-1} \cdot \rho_a^{-1} \cdot T^0 \\
 &= \frac{\mu_a}{\rho_a U_e x_e} = \frac{1}{Re}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

En répétant la démarche de l'étape 3 pour les autres variables, on trouve tous les groupes adimensionnels. Le tableau 5.2 montre les groupes identifiés ainsi qu'une brève description de leur signification.

Tableau 5.2 Groupes adimensionnels du problème de Bagnold

Numéro	Expression	Nombre associé	Signification
$\Pi_1$	$\frac{\rho_a U_e x_e}{\mu_a}$	$Re$	$\frac{\text{Forces inertie}}{\text{Forces visqueuses}}$
$\Pi_2$	$\frac{D}{x_e}$	-	$\frac{\text{Diamètre}}{\text{Hauteur d'équilibre}}$
$\Pi_3$	$\frac{m_p}{\rho_a x_e D}$	-	$\frac{\text{Masse linéique piston}}{\text{Masse linéique d'air}}$
$\Pi_4$	$\frac{\rho_a U_e^3 x_e}{k_a \Delta T_a}$	$Cl$	$\frac{\text{Énergie cinétique}}{\text{Transfère thermique par conduction}}$
$\Pi_5$	$\frac{P_a}{\rho_a U_e^2}$	-	$\frac{\text{Pression totale}}{\text{Pression dynamique}}$
$\Pi_6$	$\frac{U_e^2}{g x_e}$	$Fr$	$\frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de gravité}}$
$\Pi_7$	$\frac{tV}{x_e}$	-	$\frac{\text{Distance totale parcourue}}{\text{Hauteur d'équilibre}}$
$\Pi_8$	$\frac{C_p}{C_v}$	$\gamma_a$	$\frac{\text{Capacité thermique isobare}}{\text{Capacité thermique isochore}}$

Dans le tableau 5.2, la colonne *Expression* correspond au nombre trouvé grâce à la procédure de l'étape 3. La colonne *Nombre associé* montre si l'expression trouvée correspond déjà à un nombre utilisé en mécanique des fluides et la colonne *Signification* montre ce que les nombres adimensionnels trouvés représentent.

Les quatre nombres déjà utilisés sont, respectivement, le nombre de Reynolds, le nombre de Clausius, le nombre de Froude et l'exposant isentropique. Ce dernier étant une variable déjà adimensionnée dans le tableau 5.1, il se retrouve directement dans le tableau 5.2.

Le nombre de Reynolds et le nombre de Froude sont déjà bien connus. Il n'est donc pas surprenant de les retrouver ici. Aussi, ils apparaissent naturellement dans le système d'équations adimensionné (2.20). En ce qui concerne le nombre de Clausius, il est possible de le réécrire en fonction d'autres nombres adimensionnels :

$$Cl = Ec \cdot Pr \cdot Re \quad (5.9)$$

Puisque le nombre de Reynolds est déjà un des regroupements adimensionnels du tableau 5.2, on peut le retirer de l'équation (5.9) et obtenir :

$$\Pi_4 = Ec \cdot Pr \quad (5.10)$$

## Système d'équation adimensionnalisé

En observant les nombres adimensionnels obtenus, on peut remarquer qu'ils sont les mêmes que dans le système adimensionnalisé (2.20). Pour faire ressortir explicitement les nombres du tableau 5.2, il faut simplement multiplier l'équation d'énergie par  $PrRe$ . Ainsi, on obtient le système d'équations adimensionné pour le problème de Bagnold :

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\gamma M_r^2}{\gamma M_r^2 p_m + 1} \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p_m \right) \\
 &\quad - \frac{T_s/T_r}{\frac{T_s}{T_r} T_m + 1} \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_m \right) \\
 \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p_m + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{f} \\
 RePr\rho c_p \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_m \right) &= \nabla \cdot (k \nabla T_m) + EcPrRe \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p_m \right) \\
 &\quad + EcPr (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}) + q \\
 \rho &= \rho_r \frac{(\gamma M_r^2 p_m + 1)}{(\frac{T_s}{T_r} T_m + 1)}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

### 5.1.4 Résultats

Dans cette section, on compare les résultats obtenus avec le solveur *ode45* de *matlab* et ceux de notre code Navier-Stokes. Pour effectuer la comparaison, on choisit de prendre la position du piston  $x$  et la pression à l'intérieur du cylindre  $p$  pour deux nombres d'impact :  $S = 0.1$  et  $S = 10$ . On a fait le choix de ces valeurs afin de montrer que notre code fonctionne aussi quand on reste dans la zone linéaire ( $S = 0.1$ ) autant que quand on est dans la zone non-linéaire ( $S = 10$ ).

Pour lancer une simulation avec *CADYF* (notre code Navier-Stokes) avec le même nombre d'impact que le modèle *matlab*, on calcule  $\rho_p$  à partir de la définition de  $S$  (5.4). Puis, on choisit la masse du piston en appliquant  $m = \rho_p D$ . Dans *CADYF*, les simulations ont été effectuées sur un domaine dimensionnel pour des raisons de performances. En prenant  $D = 0.005\text{m}$  et  $x_0 = 0.25\text{m}$ , on obtient un maillage suffisamment régulier (avec un seul élément en  $x$ ) qui peut « s'écraser » assez sans devenir des éléments trop étirés. La figure 5.3 montre le maillage au début de la simulation et au point le plus bas de la course du piston.

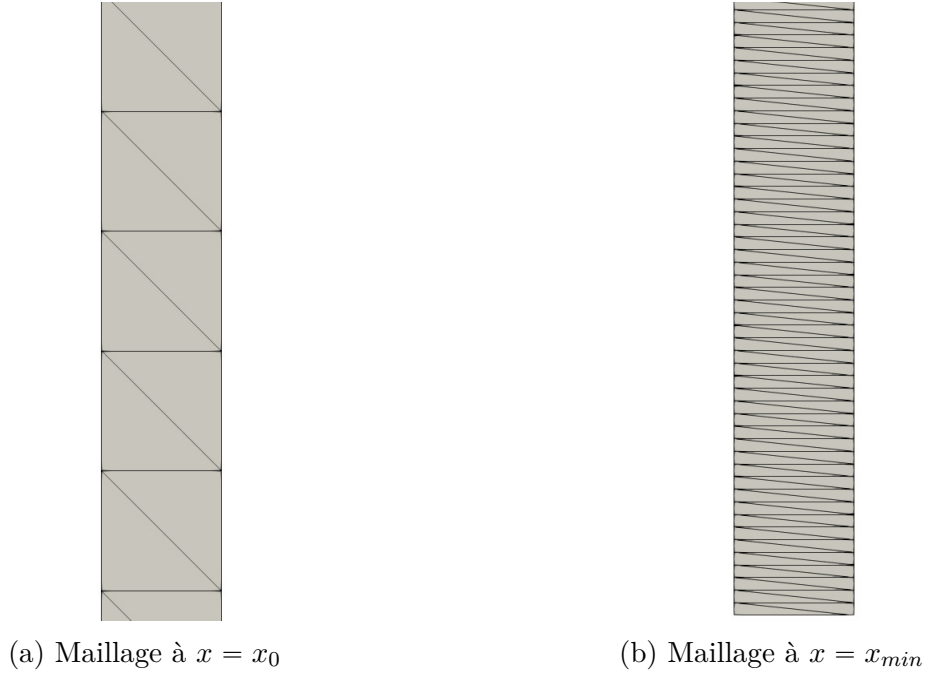
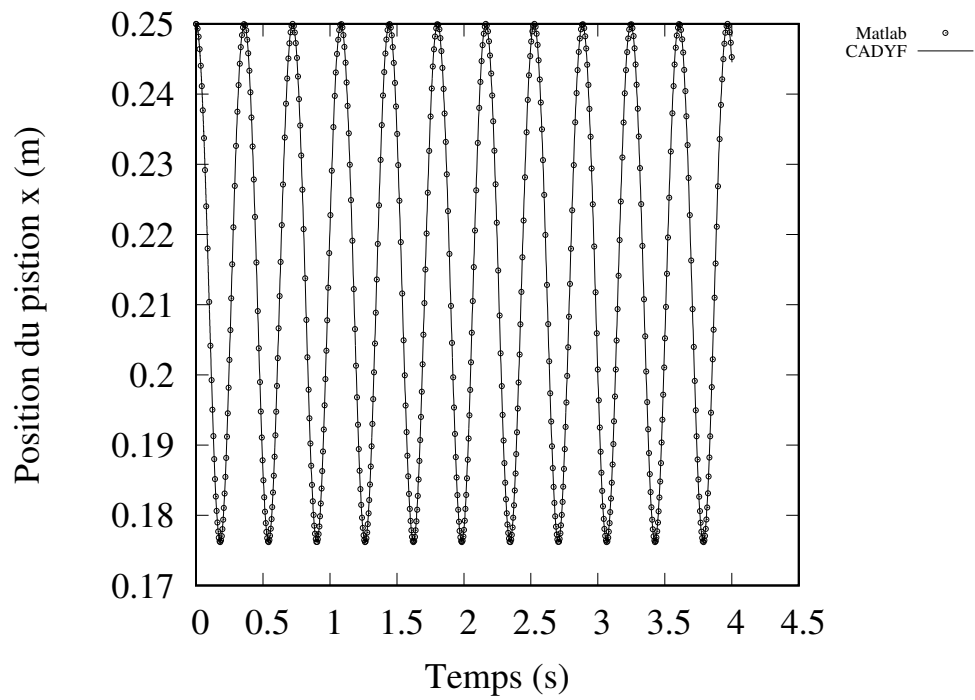
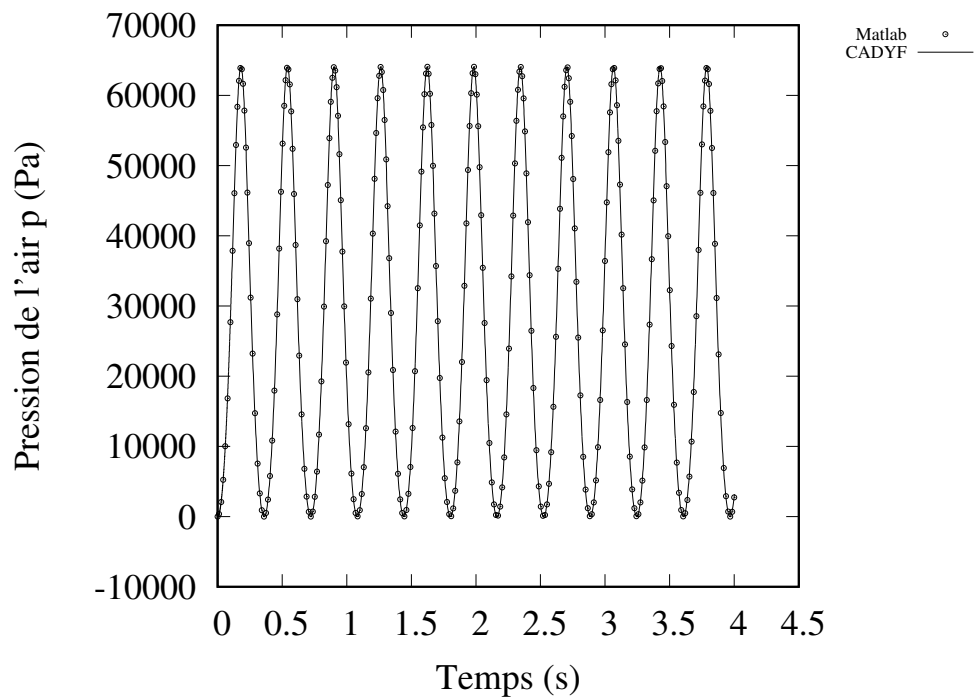
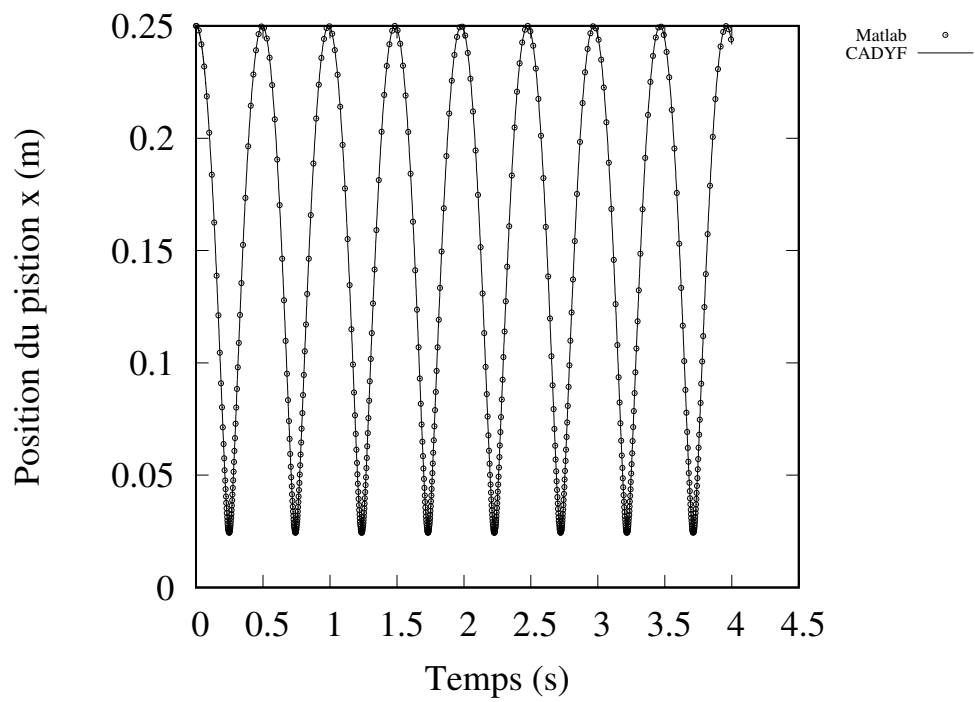
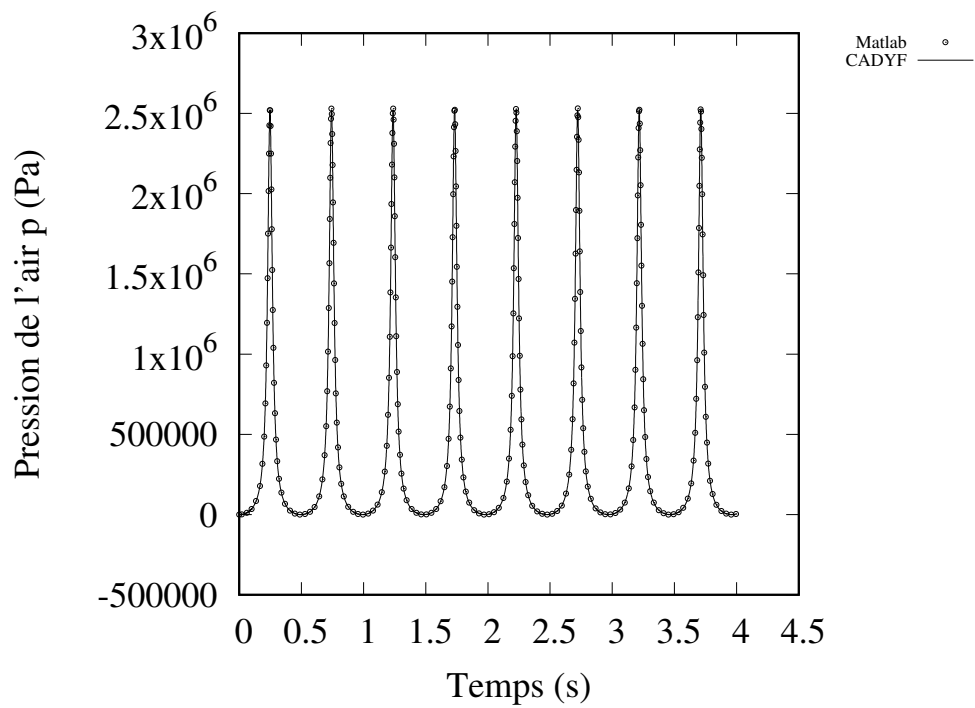


Figure 5.3 Maillages initial et comprimé du problème de Bagnold

Notez que la figure 5.3a représente seulement une partie du haut du domaine alors que la figure 5.3b représente le domaine complet une fois le maillage écrasé pour  $S = 10$ .

Pour les deux variables observées  $(x, p)$ , la forme de la solution doit être sinusoïdale. En effet, le problème du piston est un simple problème masse-ressort sans amortissement. La solution pour la position  $x$  du piston devrait donc être de forme sinusoïdale. Or, plus le nombre d'impact est élevé, plus l'air est comprimée et plus la pression de l'air deviendra grande à l'intérieur du cylindre. Ce phénomène se traduit par une remontée beaucoup plus rapide du piston que sa descente lorsqu'il atteint sa hauteur maximale (quand la force de gravité balance celle de pression dans le piston). On s'attend donc à avoir une forme de sinus où les pics sont arrondis et les creux sont très minces pour  $x$ . Pour la pression, on aura des pics très minces avec des creux plus larges puisque celle-ci est maximale lorsque le piston est à son plus bas. Les figures 5.4 et 5.5 montrent bien la forme décrite.

(a) Comparaison de la position  $x$  du piston(b) Comparaison de la pression  $p$  de l'airFigure 5.4 Comparaison des solutions entre *matlab* et *CADYF* pour  $S = 0.1$

(a) Comparaison de la position  $x$  du piston(b) Comparaison de la pression  $p$  de l'airFigure 5.5 Comparaison des solutions entre *matlab* et *CADYF* pour  $S = 10$

Notez que dans les figures 5.4 et 5.5, la solution *matlab* est discrétisée de façon beaucoup plus fine qu'il ne l'est montré. On a décidé de retirer des points dans les figures afin de ne pas les surcharger et de les rendre plus visibles.

Pour la figure 5.4, on a une forme qui ressemble beaucoup à un sinus autant pour la position  $x$  du piston que pour la pression  $p$  de l'air. En effet, puisque le nombre d'impact est faible, les termes non-linéaires ne sont pas élevés et n'affectent pas grandement la forme sinusoïdale d'un système masse-ressort. Cette forme de graphique confirme nos prédictions quant à la forme de la solution. Aussi, en comparant avec la solution *matlab*, on remarque que la superposition des solutions est quasi-parfaite. On peut donc dire que notre code est calibré pour un nombre d'impact faible.

Lorsque le nombre d'impact est élevé, on sort de la zone linéaire et on peut l'observer par la forme plus atypique du système masse-ressort que montre la figure 5.5. Comme on l'avait prédit, la position  $x$  du piston (figure 5.5a) a un comportement où les pics sont arrondis et les creux sont émincés. Pour mieux observer ce phénomène, on peut se fier à la pression (figure 5.5b) qui montre vraiment bien la différence entre les pics et les creux des oscillations. Clairement, on est dans un régime où les non-linéarités ne sont plus négligeables. Ainsi, en comparant notre solution avec celle de *matlab* et en observant une superposition encore quasi-parfaite des deux solutions, on peut affirmer que notre code est calibré pour les nombre d'impacts plus élevés.

Donc, en ayant vérifié le comportement de notre code compressible instationnaire, on peut se lancer dans la simulation d'un cas réel qui est présenté à la section 5.2.

## 5.2 Poche d'air emprisonnée sous une vague

Dans cette section, on s'intéresse au problème d'un écoulement diphasique, dont les phases sont séparées par une interface, d'une vague qui déferle à l'intérieur d'un contenant étudié dans [2]. La configuration de ce problème fait en sorte que la vague qui déferle emprisonne une poche de gaz lorsqu'elle se rapproche de la paroi du réservoir. On étudie la condition où la vague générée produit une grande poche de gaz [27] où les deux phases sont de l'air (compressible) et de l'eau (incompressible).

Afin de bien capturer l'interface entre l'eau et l'air, la méthode de suivi d'interface représente l'interface comme une discontinuité. On peut donc suivre à la trace les déplacements et les déformations de l'interface causées par l'écoulement. Le suivi d'interface requiert l'alignement du maillage avec la surface libre, ce qui nous permet de suivre son déplacement dans le temps. Pour ce faire, on utilise la formulation ALE avec le maillage pseudo-solide (voir section 3.4)



afin de suivre l'interface dans le temps. Ceci nous permet de modéliser l'interface précisément même dans les cas de grandes déformations.

Puisque l'interface est représentée par une collection d'arêtes successives du maillage, on obtient une interface d'épaisseur nulle, d'où l'avantage de cette méthode par rapport aux méthodes de capture d'interface (comme la *VOF*)[28] qui étalent l'interface sur deux éléments d'épaisseur. Par contre, elle est moins pratique pour ce qui est des changements de topologie d'interface, car cela nécessite une intervention manuelle de l'utilisateur pour scinder en deux segments d'interfaces ou pour en fusionner deux en un.

### 5.2.1 Description du problème

#### Domaine

La vague d'intérêt correspond à celle observée dans une expérience effectuée dans un contenant de 20m de longueur ( $x_c = 20m$ ) et de 12m de hauteur ( $y_c = 12m$ ). On obtient une vague qui emprisonnera une poche d'air en choisissant la forme initiale de la surface libre (équation 5.12) et en spécifiant une bathymétrie elliptique posée au fond de la cuve (équation 5.13).

$$y = h + a \tanh[r(x - x_p x_c / 4)] \quad (5.12)$$

où  $x_p = 3.1$ ,  $h = 7.6$ ,  $a = 3.6$  et  $r = 0.44$ . Les coefficients sont tirés de [2].

$$\frac{x^2}{r_a} + \frac{y^2}{r_b} = 1 \quad (5.13)$$

où  $r_a = 18$  et  $r_b = 2.8$ .

Au final, toutes ces équations permettent de former le domaine initial montré à la figure 5.6.

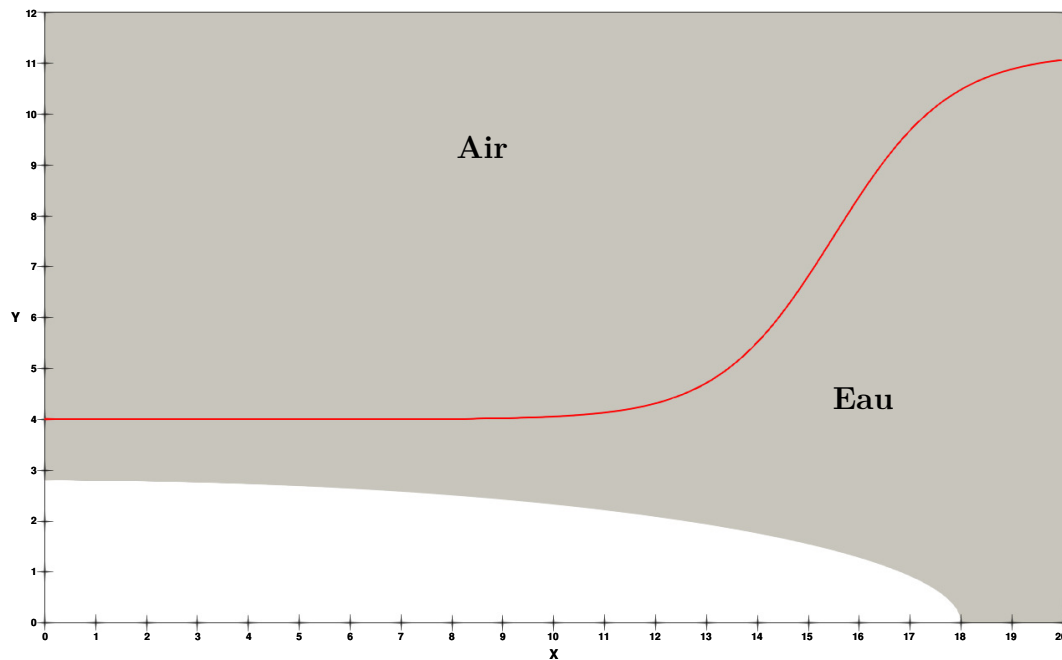


Figure 5.6 Domaine et interface initiale de la vague

## Propriétés

Pour effectuer ce calcul, on a choisi l'eau et l'air comme fluides. Évidemment, l'eau se retrouve sous l'interface et l'air se retrouve en haut de l'interface. Dans le tableau 5.3, on retrouve les propriétés des fluides. On a choisi la masse volumique de l'air et de l'eau pour que le rapport des masses volumiques soit de 1/1000. C'est ainsi qu'on obtient la plus grosse poche de gaz quand la vague se rapproche du mur.

Tableau 5.3 Propriétés des fluides

<b>Fluide</b>	<b>Masse volumique</b> ( $kg/m^3$ )	<b>Viscosité</b> ( $kg/(m \cdot s)$ )	<b>Conductivité</b> ( $W/(m \cdot K)$ )	<b><math>C_p</math></b> ( $J/K$ )
Eau	1000	$1.00 \cdot 10^{-3}$	$6.00 \cdot 10^{-1}$	3185.0
Air	1.000	$1.75 \cdot 10^{-5}$	$2.56 \cdot 10^{-2}$	1004.7

La différence majeure entre notre calcul et celui de [2] est le fait que dans notre cas, l'air est considéré comme compressible, ce qui est un pas de plus dans l'amélioration du réalisme du modèle. Donc, le calcul de la vague se fait avec un fluide incompressible très dense (l'eau) et avec un gaz compressible mille fois moins dense que l'eau (l'air).

## Conditions limites

Les conditions limites appliquées sont des conditions de glissement partout sur le domaine afin d'éviter le développement de couches limites qui nécessiteraient beaucoup de ressources de calcul inutilement pour ce problème. La condition de glissement est définie en posant une condition de Dirichlet nulle dans la direction normale ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ) et une condition de Neumann nulle dans la direction tangentielle ( $(-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{t} = 0$ ). Dans le cas où la frontière n'est pas alignée avec le système d'axes du domaine (comme la bathymétrie), on impose la contrainte de non-pénétration ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ) via la méthode du Lagrangien Augmenté.

## Conditions limites à l'interface

Les conditions limites à l'interface sont choisies de façon à conserver la masse et la quantité de mouvement. En considérant qu'il n'y a pas de changement de phase et que la tension de surface est négligée, on doit avoir la continuité de la vitesse à l'interface et la somme des forces à l'interface doit être nulle. Ces conditions sont traduites comme suit : si on désigne  $\llbracket a \rrbracket$  comme étant le saut de la variable  $a$  à l'interface alors on doit respecter la condition cinématique  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = 0$  et la condition dynamique  $\llbracket \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0$  [18]. Pour ce faire, on utilise des éléments 1D d'épaisseur nulle afin d'imposer les conditions de saut.

Puisque l'on utilise un maillage pseudo-solide, on doit poser une condition supplémentaire à l'interface pour le déplacement du maillage. Ainsi, afin que le maillage se déplace de la même façon sur le dessus qu'en dessous de l'interface, on impose la continuité du déplacement du maillage ( $\llbracket \boldsymbol{\chi} \rrbracket = 0$ ).

Aussi, puisqu'on veut conserver l'intégrité de la surface libre, on doit imposer des conditions sur la vitesse ALE ( $\mathbf{v}$ ). On impose alors que la vitesse ALE normale à l'interface doit être égale à la vitesse fluide à l'interface, ce qui se traduit par :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \quad (5.14)$$

En vitesse tangentielle, on a choisi une condition qui permet de conserver la régularité du maillage. La vitesse ALE tangentielle est choisie de sorte que le déplacement des nœuds se fasse de façon à conserver constant le ratio entre les longueurs de maille de part et d'autre d'un nœud entre chaque pas de temps [18]. La figure 5.7 et l'équation (5.15) montrent la condition implémentée.

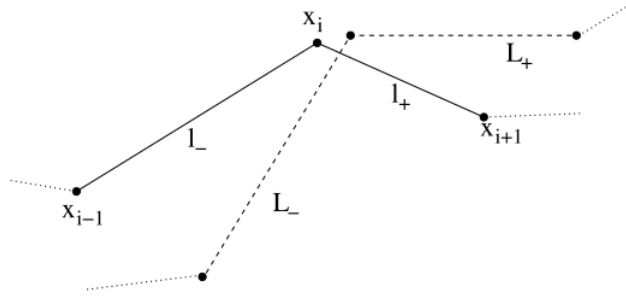


Figure 5.7 Arrêtes initiales et déformées sur la surface libre ©Hay (2015). Reproduit avec permission

$$\frac{L_-}{l_-} = \frac{L_+}{l_+} \quad (5.15)$$

où  $l_-$  et  $l_+$  sont les longueurs d'arêtes initiales et  $L_-$  et  $L_+$  sont les longueurs d'arêtes déplacées.

Pour la température, on devrait avoir le même genre de condition que les conditions cinématiques et dynamiques, c'est-à-dire  $[[T]] = 0$  et  $[[k\nabla T \cdot \mathbf{n}]] = 0$ . Or, par soucis de temps, l'implémentation de cette condition n'a pas été faite. Alors, le choix d'une condition de Neumann nulle a été fait ( $-k\nabla T \cdot \mathbf{n} = 0$ ). On suppose que cette condition n'aura pas un gros effet sur le calcul, car la partie où l'air est comprimé et qui pourrait être influencée par cette condition ne dure qu'une très courte période de temps (environ 0.1s).

### 5.2.2 Résultats

Dans cette section, on présente les résultats du calcul de la LGP. On montre l'évolution du maillage, de la pression et du nombre de Mach tout en effectuant la discussion pour chacun de ces paramètres. Puis, on compare le cas où l'air est compressible avec le cas où on le considère incompressible pour montrer les différences que l'incorporation de la compressibilité apporte. Pour ce faire, on compare la pression, le nombre de Mach et la masse volumique de l'air sur la paroi gauche en fin de calcul (au moment où le nez de la vague est le plus proche de la paroi).

Il est important de noter que les résultats présentés sont préliminaires et que plusieurs améliorations sont possibles pour combler quelques lacunes. Ces lacunes et leur amélioration possible seront présentées dans la discussion. Le présent travail prend en compte le fait que ces lacunes peuvent influencer les résultats et porte une attention particulière sur les amélio-

ractions nécessaires afin d'obtenir des résultats plus robustes.

## Maillage

Pour tous les résultats générés, on a choisi  $h_{ref} = 0.2$ , ce qui nous permet d'avoir un maillage assez grossier pour ne pas capter d'instabilités de Kelvin-Helmholtz en début de calcul. Sans la tension de surface, ces instabilités se développent sans qu'il y ait de force pour les atténuer et font diverger le calcul. Par contre, la conséquence d'avoir un maillage plus grossier affecte la fin du calcul où l'interface est très proche de la paroi. En effet, on se retrouve avec une situation où il n'y a qu'une seule maille entre la paroi et l'interface dans une région où les gradients sont élevés. La figure 5.8 montre l'évolution du maillage dans le temps.

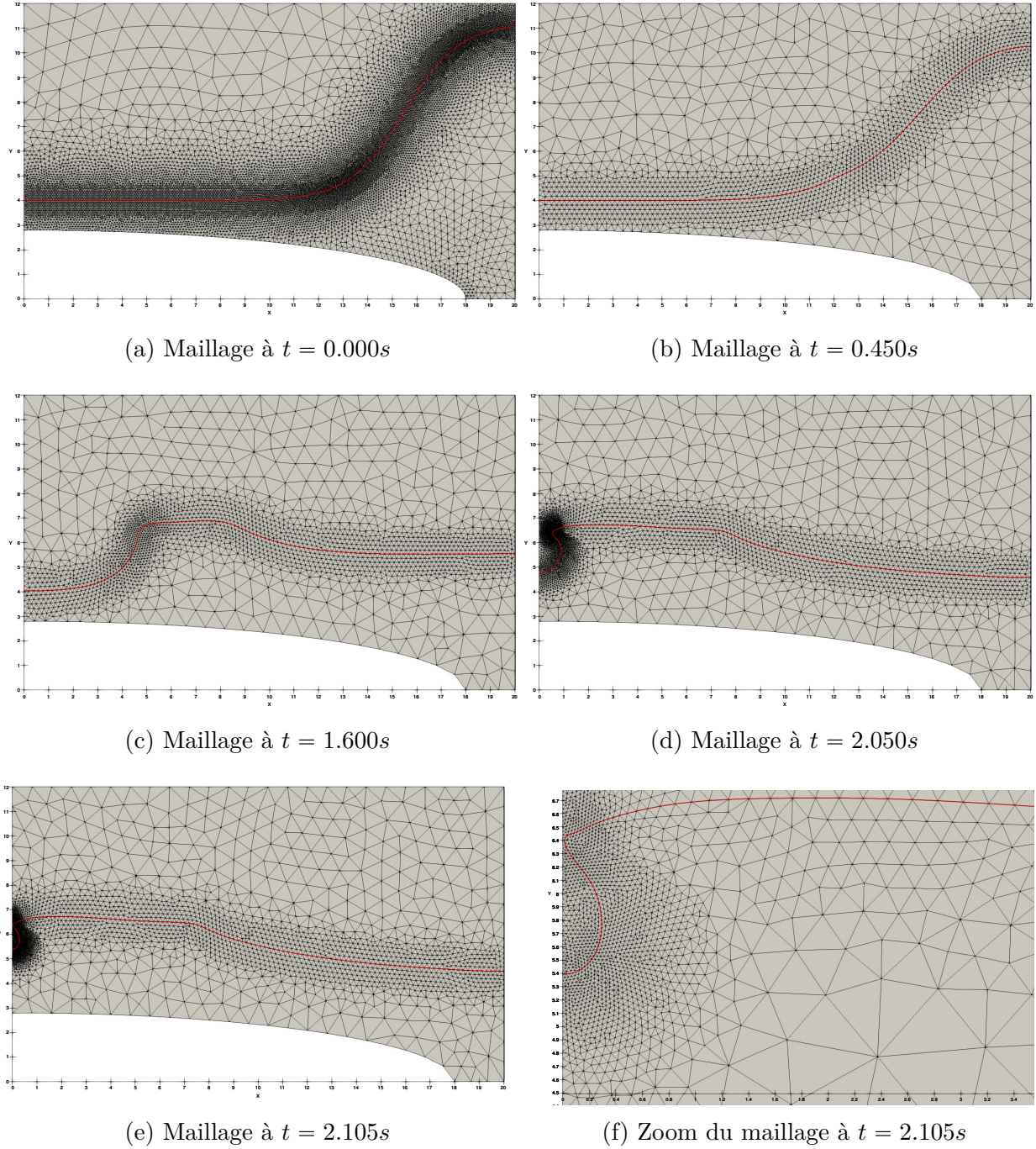


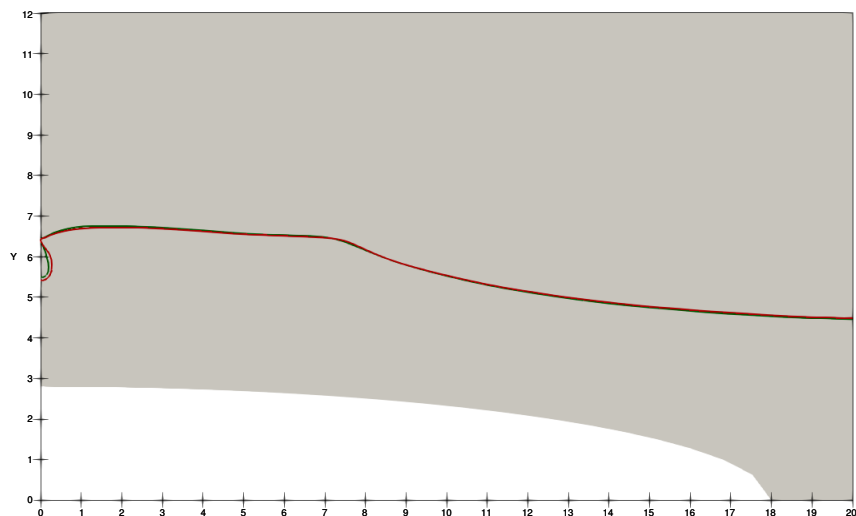
Figure 5.8 Évolution du maillage

En observant l'évolution du maillage, on peut voir que l'algorithme de remaillage semble bien fonctionner. Au temps initial (figure 5.8a), on donne un maillage très raffiné, voire trop raffiné si on considère qu'un tel maillage déclencherait des instabilités de surface. Or, lors du premier remaillage (figure 5.8b), on voit que l'algorithme augmente la taille du maillage qui est donc

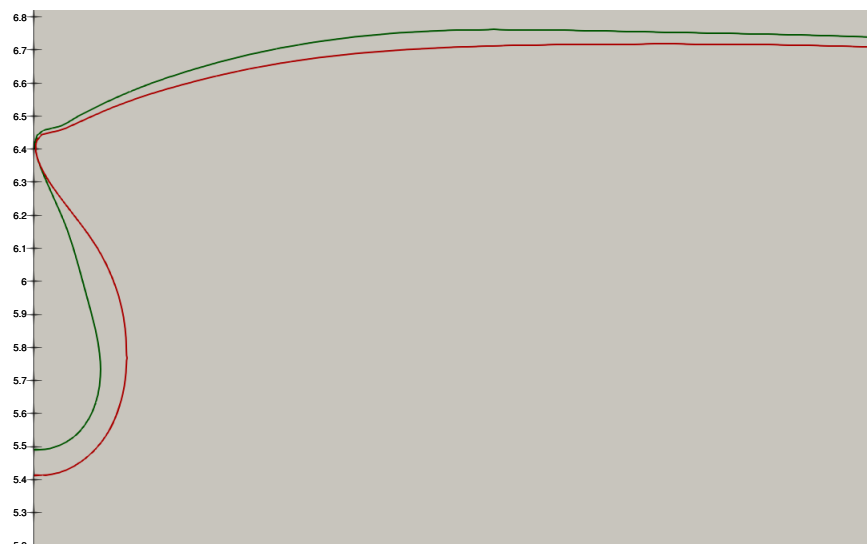
moins raffiné. Ceci nous évite d'avoir à simuler les instabilités. Les figures 5.8c-5.8e montrent que plus la courbure de l'interface est grande plus le maillage est fin. C'est le comportement attendu selon l'algorithme présenté à la section 3.3.2. La figure 5.8f présente un zoom sur le dernier maillage avant que la solution ne diverge. Tel que mentionné plus haut, il n'y a qu'une seule maille qui sépare l'interface de la paroi de gauche du domaine. On prendra ce fait en considération lors de l'analyse des autres variables.

**Amélioration 1** En effectuant plusieurs calculs avec des maillages différents, on s'est rendu compte qu'un petit changement dans le maillage pouvait apporter un grand changement dans la forme finale de la vague autant en incompressible qu'en compressible. On s'est rendu compte de ce problème quand on a essayé de raffiner le maillage entre l'interface et la paroi de gauche en fin de calcul. En observant ces différences, on a décidé de vérifier si les résultats se répéteraient entre un calcul simple-cœur et multi-cœurs. En le faisant en multi-cœurs, on peut obtenir des vagues de formes assez différentes à chaque fois. Ceci peut s'expliquer par le fait que le remaillage, étant déclenché par une déformation d'élément maximale, peut s'activer à des temps physiques légèrement différents. L'accumulation de ces remaillages mène à des interfaces finales qui sont assez différentes. La figure 5.9 montre la différence entre le calcul à simple-cœur et un de ceux à multi-cœurs. À cause de ce problème, on a décidé de ne présenter que les résultats issus du calcul à simple-cœur. Pour ce qui est des différences de solution causées par un maillage légèrement différent, il est difficile d'effectuer une analyse de convergence en maillage pour ce genre de cas. Bref, il faut trouver une façon de faire fonctionner la simulation de façon régulière avant de continuer les développements pour ce cas.

Il est important de noter que malgré les différences d'interfaces, les valeurs pour la pression et le nombre de Mach restent toujours du même ordre de grandeur. Donc, on va plus se fier à l'ordre de grandeur de ces variables par rapport au cas incompressible plutôt qu'à la valeur absolue de ces variables.



(a) Forme de l'interface simple-cœur (rouge) et en multi-cœurs (vert)



(b) Zoom de la forme de l'interface simple-cœur (rouge) et en multi-cœurs (vert)

Figure 5.9 Comparaison des interfaces pour le cas simple-cœur et un cas multi-cœurs

## Pression

La figure 5.10 présente la pression au temps initial et à la fin du calcul seulement car ce sont en ces moments qu'il est intéressant de l'observer. D'abord, la figure 5.10a montre la pression initiale dans l'air et dans l'eau. Ici, on veut simplement montrer que la pression hydrostatique est considérée dans le calcul. Sinon, les figures 5.10b et 5.10d montrent l'évolution de la pression en fin de calcul avec les figures 5.10c et 5.10e leur zoom respectifs qui montrent la pression dans l'air seulement. Comme on peut le voir, plus la vague se rapproche, plus la



pression dans la poche est grande, ce qui est normal. Or, les effets compressibles permettent d'avoir un ordre de grandeur de pression dans la poche qui semble faire du sens. En effet, la pression mécanique  $p_m$  maximale est de l'ordre de 100 kPa. Considérant que la pression de référence est de  $p_r = 101.325$  kPa, la pression n'a que doublé dans la poche. Cette pression serait beaucoup plus haute si l'air était emprisonné (comme dans le cas de Bagnold) ou si on le considère incompressible (voir figure 5.13). On ne le montre pas, mais le résultat de la compression montre aussi une augmentation de la température et de la masse volumique de l'air à l'intérieur de la poche de gaz ce qui est le même comportement observé dans le cas du problème de Bagnold.

**Note :** Les échelles sont adaptées à chaque sous-figure indépendamment.

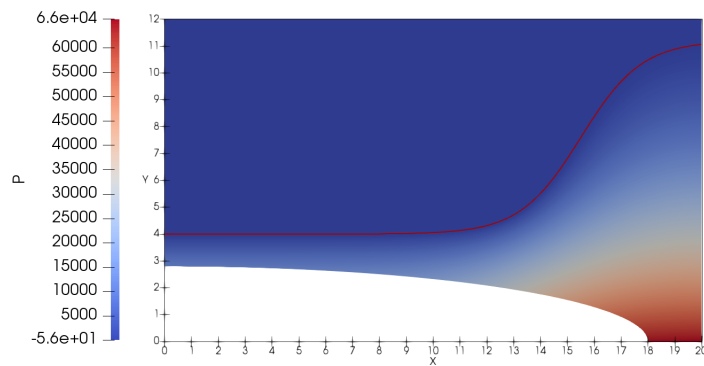
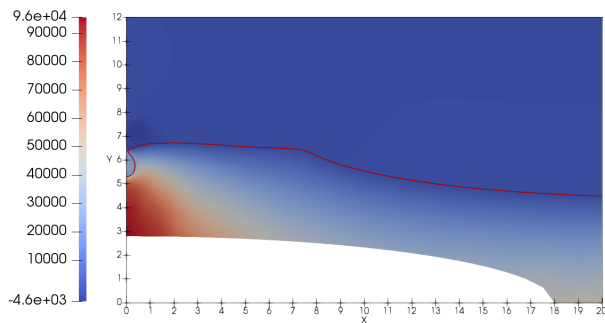
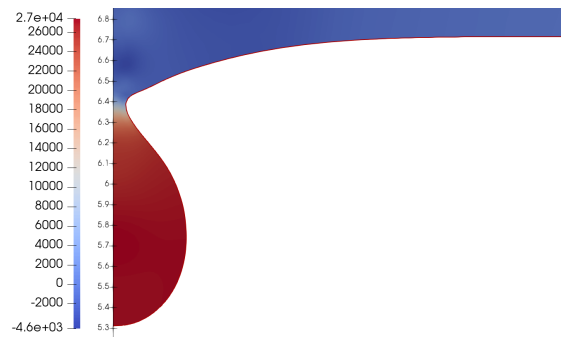
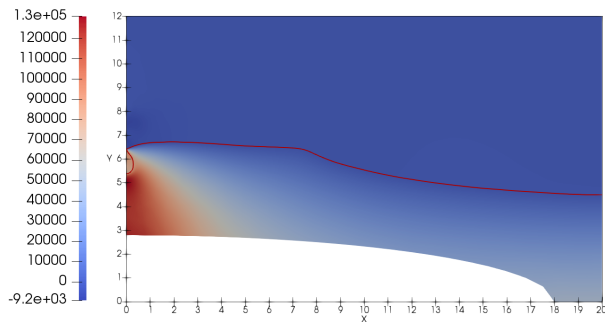
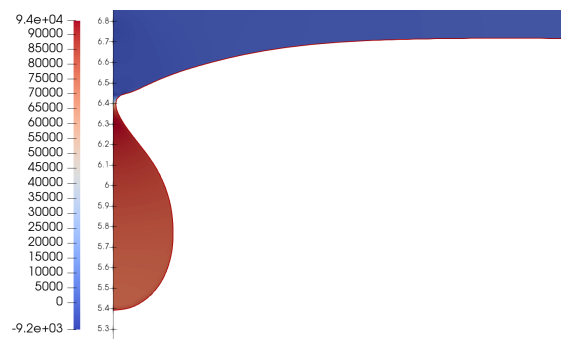
(a) Pression à  $t = 0.000s$ (b) Pression à  $t = 2.100s$ (c) Zoom de la pression à  $t = 2.100s$ (d) Pression à  $t = 2.105s$ (e) Zoom de la pression à  $t = 2.105s$ 

Figure 5.10 Évolution de la pression

## Nombre de Mach

La figure 5.11 présente l'évolution en fin de simulation du nombre de Mach. Seulement l'air est montrée car l'eau est incompressible. On peut voir que le nombre de Mach passe, en un temps

physique de  $\Delta t = 0.025s$ , de  $M = 0.24$  à  $M = 1.3$ . Le nombre de Mach maximal est toujours situé en avant de la pointe de la vague, car l'air est expulsé à cet endroit. Il est donc normal d'y retrouver la vitesse la plus élevée. Aussi, il faut prendre les résultats avec précaution, car le nombre de Mach calculé dépasse  $M = 1$ . En ce sens, notre modèle compressible sort de sa zone de validité car notre modèle éléments finis ne comporte pas d'algorithme de capture de choc. On était surpris de voir que le nombre de Mach était supérieur à 1. Aussi, dans la figure 5.11d, on voit qu'il y a une sorte de couche limite qui se développe sur la paroi, même si on a imposé une condition de glissement. Cela veut dire que ce phénomène est en fait un jet très mince causé par la sortie rapide du fluide. Peu importe le phénomène, un gradient aussi élevé doit comporter un maillage assez fin pour bien approximer la solution. Or, ceci est une autre limitation de ce calcul.

**Amélioration 2** Une fois l'amélioration 1 réglée, c'est-à-dire quand le problème de consistance entre les calculs sera réglé, il sera fort intéressant d'aller raffiner proche de la paroi pour voir si on peut obtenir une meilleure approximation du nombre de Mach.

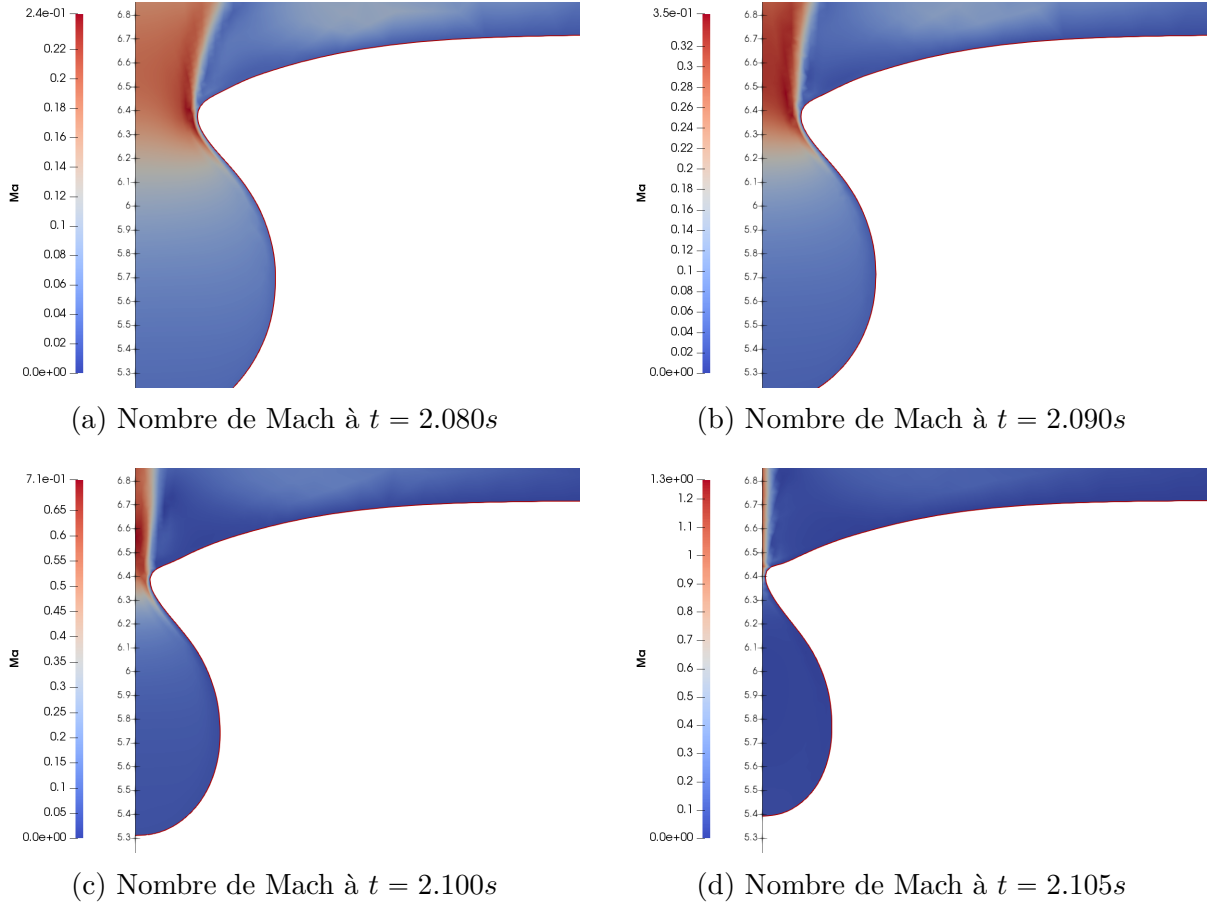
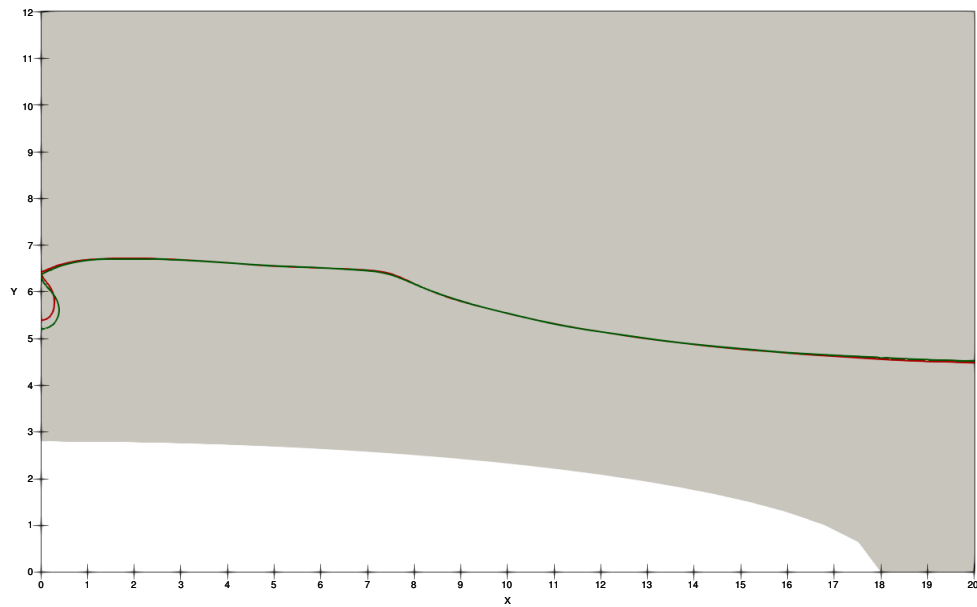


Figure 5.11 Évolution du nombre de Mach en fin de simulation

### Comparaison avec l'écoulement incompressible

Pour montrer qu'on est sur la bonne voie malgré des résultats assez préliminaires, on compare le cas compressible et le cas incompressible pour la pression, le nombre de Mach et la masse volumique. D'abord, à titre de référence, la figure 5.12 montre la comparaison des interfaces finales entre le cas incompressible (en vert) et le cas compressible (en rouge). Encore une fois, les calculs ont été effectués à simple coeur.



(a) Forme de l'interface en incompressible (vert) et en compressible (rouge)



(b) Zoom de la forme de l'interface en incompressible (vert) et en compressible (rouge)

Figure 5.12 Interfaces de l'air incompressible et de l'air compressible

Avec ces résultats, on a généré un graphique qui montre la pression en fonction de  $y$  dans l'air sur la paroi de gauche (voir figure 5.13). La zone intéressante est incluse dans  $5.4\text{m} < y < 6.4\text{m}$ . Cette zone représente la poche de gaz. En observant cette figure, on peut immédiatement

conclure que l'ajout des effets compressibles a un grand impact sur la pression calculée. Si on compare la pression dans la poche, celle-ci est environ 5 fois moins élevée dans le cas compressible que dans le cas incompressible. Comme on a dit plus haut, une pression de 2 atm (2 fois celle de l'atmosphère) fait beaucoup plus de sens qu'une pression de près de 7 atm. Sinon, en haut du domaine, là où l'air n'est plus affecté par le jet, la pression mécanique est nulle dans le cas du régime compressible, mais pas dans le régime incompressible. Ceci s'explique par le fait que dans le régime incompressible, on doit imposer un zéro de pression dans le domaine pour lui donner une référence et la pression s'adapte. Ici, le zéro de pression est donné dans le bas à droite du domaine, ce qui fait que la pression doit être plus faible que 0 en haut de ce point pour respecter la pression hydrodynamique.

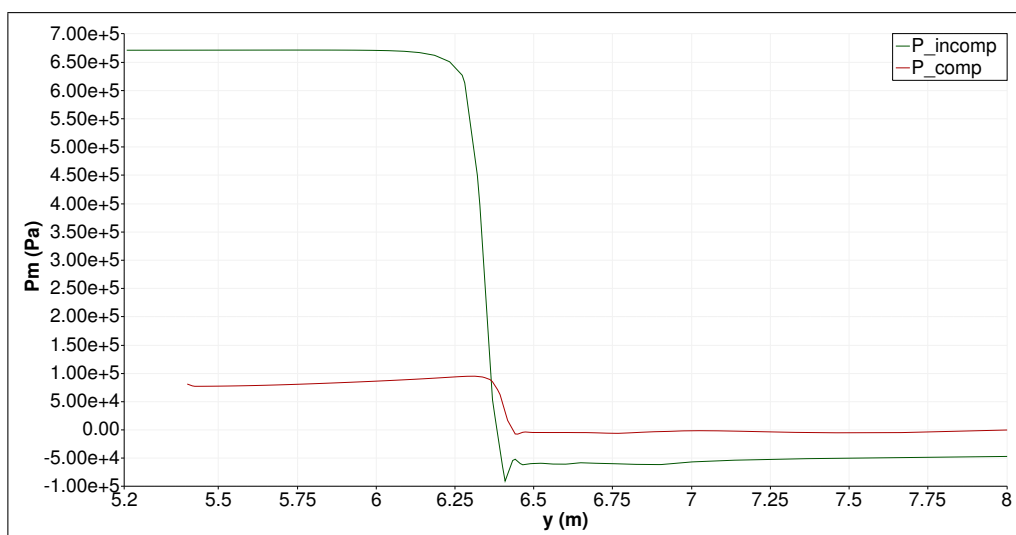


Figure 5.13 Comparaison des pressions sur la paroi au temps final

Pour le nombre de Mach, on tient à mentionner qu'on a calculé celui de la simulation incompressible en considérant de l'air à  $T = 293K$  dans tout le domaine. Ainsi, on fait l'hypothèse que la vitesse du son est constante dans le domaine et qu'elle n'est pas infinie (pour pouvoir avoir un élément comparatif avec le cas compressible). La figure 5.14 montre le résultat de la comparaison. Dans les deux cas, le nombre de Mach semble avoir sensiblement le même comportement. C'est-à-dire qu'il n'est pas très élevé dans la poche, mais que plus on se rapproche du «convergent-divergent» créé par la pointe de la vague, plus le nombre de Mach devient grand et ce, de façon assez radicale. Puis, il redescend jusqu'au point où l'écoulement n'est plus beaucoup affecté. Malgré la ressemblance de comportement, le cas incompressible donne un nombre de Mach maximal de près de 3.6, ce qui est énorme et ne fait pas de sens (voir [2]). Et, malgré nos réserves quant à nos résultats, le nombre de Mach maximal qu'on obtient dans le cas compressible ( $M = 1.3$ ) semble être beaucoup plus proche de la réalité

que dans le cas incompressible.

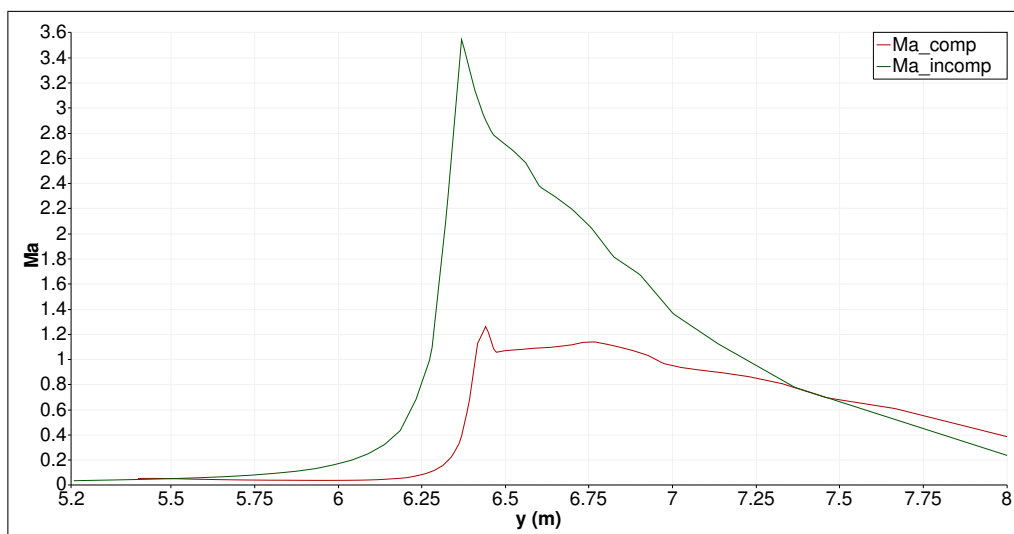


Figure 5.14 Comparaison du nombre de Mach sur la paroi au temps final

Le dernier point d'intérêt est la masse volumique. On sait très bien que dans le cas incompressible, celle-ci reste constante et c'est ce qu'on observe sur la figure 5.15. Ici, on veut surtout montrer que la masse volumique est variable dans la poche de gaz pour montrer qu'on est bel et bien dans un calcul compressible. Ce qui saute aux yeux dans la figure 5.15, c'est la première partie où il semble y avoir un très fort gradient de  $\rho$ . On peut affirmer que ce comportement étrange est lié à la condition limite imposée sur la température à l'interface (sujet de l'amélioration 3). Puisqu'on impose une condition de Neumann nulle sur l'interface, la température sur l'interface est aussi nulle, à cause de l'eau qui a une température mécanique nulle dans la simulation. Ainsi, puisque le transfert de chaleur doit être nul à l'interface, la température du premier point dans l'air est aussi nulle. Ayant une température basse, la masse volumique est surestimée en ce point. Malgré tout, sur l'espace d'un élément, la masse volumique est rectifiée et donne une valeur plus réaliste lorsqu'elle tourne autour de  $\rho = 1.45 \text{ kg/m}^3$ . Donc, si dans le bas de la poche la masse volumique est à ce niveau, il est normal qu'elle augmente en se rapprochant de la pointe de la vague. Puis, elle redescend à son niveau de référence de façon abrupte tout juste en quittant le « convergent-divergent ».

**Amélioration 3** Tel que mentionné plus haut, les conditions limites de saut nul pour la température et son gradient à l'interface ne sont pas implémentées. En les ajoutant, on pourrait éviter d'avoir ce gradient de température (et donc de la masse volumique) dans l'élément situé dans l'air sur l'interface. Or, ce n'est pas le problème le plus urgent parce qu'il n'a pas l'air d'affecter la solution globale de manière importante. En fait, la solution semble

plutôt bien s'adapter à cette condition limite malgré le fait qu'elle n'est pas réaliste.

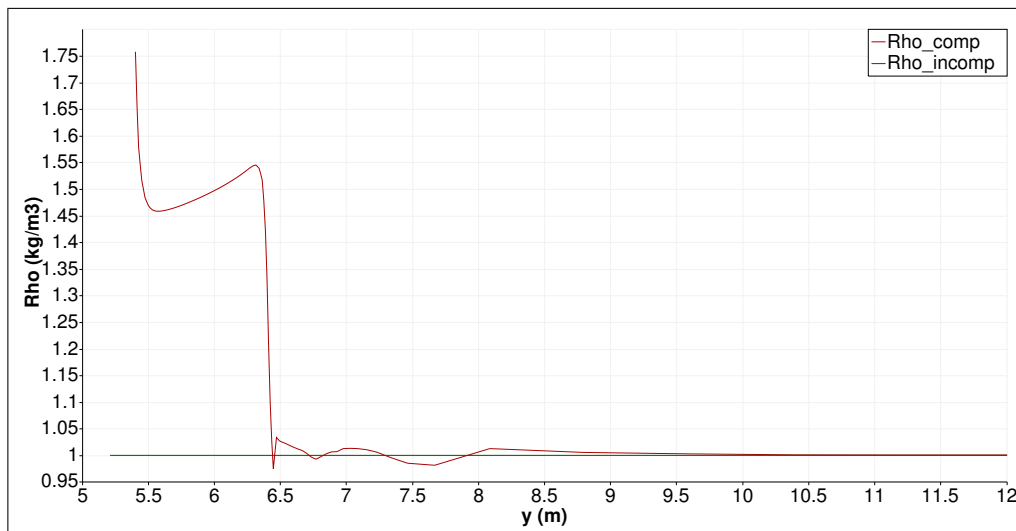


Figure 5.15 Comparaison de la masse volumique sur la paroi au temps final

Pour conclure sur le cas de la LGP, on a montré que les changements apportés au code ont permis d'obtenir des ordres de grandeur plus réalistes que le cas incompressible pour la pression et le nombre de Mach maximal. Quelques améliorations doivent être faites encore au code et quelques *bugs* doivent être corrigés, mais somme toute, les résultats semblent assez encourageants. Une fois les améliorations effectuées, il sera bien de voir si on obtient encore un nombre de Mach supérieur à 1. Si ce n'est pas le cas, on va pouvoir affirmer que nos résultats sont plus précis et plus fiables puisqu'on ne dépasse pas le régime dans lequel notre modèle est applicable. Bref, il reste encore beaucoup de travail à faire sur ce cas pour pouvoir l'amener le plus près possible de la réalité, mais ces résultats préliminaires sur les apports d'un modèle compressible semblent être dans bonne direction.



## CHAPITRE 6 CONCLUSION

### 6.1 Synthèse des travaux

Dans ce mémoire, on a tenté d'améliorer un modèle pour effectuer le calcul d'écoulements séparés par une interface. Particulièrement, on étudie le cas de la LGP, un problème qui pose plusieurs défis liés à la simulation, la mise à l'échelle et l'interaction de plusieurs phénomènes qui interagissent ensemble. L'amélioration proposée dans ce mémoire consiste en l'incorporation d'un modèle compressible instationnaire des équations de Navier-Stokes pour le gaz, tout en conservant le modèle incompressible pour l'eau. Pour effectuer l'implémentation, on a développé une formulation éléments finis, couplée avec une intégration en temps par les méthodes BDF.

En premier, on a su réécrire les équations de Navier-Stokes compressibles sous une forme unifiée qui permet, par la simple spécification de constantes, de décrire un régime incompressible ou compressible et dimensionnel ou adimensionnel. Cette écriture unifiée permet aussi d'intégrer plusieurs régimes d'écoulements dans le domaine, car elle est bien posée dans les cas limites où  $M \rightarrow 0$  et  $Ec \rightarrow 0$ . Ainsi, on peut résoudre sans problème un cas où le nombre de Mach local est élevé dans une partie du domaine et un endroit où il est faible (là où les effets compressibles sont négligeables). En ce sens, on peut dire que le premier objectif spécifique de cette recherche a été atteint, car on a trouvé une écriture bien posée dans le cas d'un fluide compressible où  $M = 0$ .

En deuxième, on a ajouté l'estimation des termes de compressibilité nécessaires à l'intégration temporelle dans le code pour permettre le calcul d'écoulements instationnaires compressibles. Une fois cette implémentation effectuée, on a effectué la vérification du code en espace et en temps. En espace, c'est-à-dire dans un problème stationnaire, on voulait vérifier que la partie déjà implémentée dans le code était encore bien résolue. En d'autres mots, on voulait s'assurer qu'on allait bien résoudre les équations en espace avant de se lancer dans les termes temporels. Par le fait même, on a vérifié l'estimateur d'erreur spatiale et l'algorithme d'adaptation de maillage en fonction de l'erreur même si on ne se sert pas de cet algorithme dans le problème final. Cette vérification supplémentaire montre qu'on pourrait se servir de cet algorithme dans une simulation temporelle où on adapterait en fonction de l'erreur spatiale et non par rapport à l'interface entre deux fluides. En ce qui concerne la vérification des termes temporels, on a montré que l'estimation des termes ajoutés ( $\partial p / \partial t$  et  $\partial T / \partial t$ ) se fait en respectant les ordres de convergence des méthodes BDF pour les ordres 1 à 3. Pour les ordres supérieurs, on peut donc affirmer que le deuxième objectif spécifique est atteint, car on a su vérifier que

l'implémentation a été effectuée correctement.

En troisième, on effectue l'application du code avec le problème de Bagnold. On a choisi ce problème car il comporte un élément important du calcul de la vague : la compression d'une poche de gaz. Ainsi, avec ce problème, on a pu montrer que le code résout bien ce cas avec deux nombres d'impact différents. Ces deux nombres d'impact ont permis de vérifier que le comportement linéaire des équations est bien résolu (un petit nombre d'impact donne une solution de forme sinusoïdale) et que le comportement non-linéaire l'est aussi (un grand nombre d'impact change la forme de la sinusoïde). Donc, puisqu'on a réussi à valider le code grâce à une solution « numériquement exacte » fournie par un modèle *matlab*, on peut dire qu'on a atteint le troisième objectif spécifique de ce mémoire.

Finalement, on effectue la résolution du problème de la vague (LGP). Plusieurs accrocs sont survenus lors de la simulation de cas, en particulier le problème d'obtenir deux fois la même solution finale. Alors, on présente les résultats de la LGP sous forme préliminaire, avec quelques bogues à régler et quelques améliorations possibles pour le futur. Malgré tout, on a su améliorer les prédictions que fournissait le modèle où l'air était incompressible. La pression maximale calculée (ou pression d'impact) est environ sept fois plus petite dans le cas compressible que dans le cas incompressible. Quant à lui, le nombre de Mach maximal est environ trois fois plus petit dans le cas compressible. Alors, même si la solution est plus ou moins robuste, on peut affirmer que le modèle compressible fait bel et bien ce qu'on attend de lui dans le cas de la LGP. La pression maximale est beaucoup plus faible, car la contrainte de divergence nulle de la vitesse en incompressible n'existe pas en compressible. Ainsi, la pression et l'échappement du fluide ne sont pas les seuls moyens de respecter la continuité en compressible. En effet, on observe une augmentation de la température et de la masse volumique dans la poche de gaz, deux phénomènes qui partagent le « fardeau » de la continuité en compressible. Finalement, les résultats obtenus avec la LGP sont encourageants et sont clairement des améliorations par rapport au modèle incompressible. On peut donc dire que le dernier objectif spécifique de la recherche a été accompli.

## 6.2 Limitations de la solution proposée

Ce mémoire comporte quelques limitations qui ont fait surface lors de la résolution des différents problèmes. La liste suivante montre les principales limitations des travaux effectués dans ce mémoire.

1. Dans la solution manufacturée (MMS) instationnaire, on ne donne pas une dépendance temporelle sur la vitesse  $\mathbf{u}$ . On a expliqué qu'en lui appliquant un sinus en temps, des

vagues de pression se formaient et faisaient diverger le calcul. Il serait bien de trouver une MMS qui pourrait fonctionner avec le terme de dérivée temporelle en vitesse, pour vérifier si l'interaction de tous les termes temporels se fait correctement.

2. Dans le cas de la LGP, la première limitation est reliée à la robustesse de la solution. Comme on l'a mentionné plusieurs fois déjà, on a eu des difficultés à répéter les résultats (surtout sur la forme finale de l'interface). Alors, il peut être difficile de trouver des conclusions lorsqu'on ne peut pas faire confiance aux résultats.
3. Une autre limitation est le fait que le nombre de Mach maximal dépasse l'unité, ce qui fait qu'on se retrouve en régime supersonique localement dans le domaine. Or, on utilise un algorithme éléments finis qui ne comporte pas d'algorithme de capture de choc. Donc, on peut dire que notre modèle est viable pour les régimes compressibles subsoniques, mais on ne peut pas conclure sur des résultats supersoniques.
4. Une analyse de convergence de maillage ou une étude de raffinement devrait être faite pour le cas de la LGP. En effet, en fin de calcul, une seule maille sépare la pointe de la vague de la paroi, ce qui n'est pas idéal dans une zone où les gradients sont importants.

### 6.3 Améliorations futures

Les améliorations à venir sont visées sur le problème de la LGP. Bien sûr, chaque limitation mentionnée peut faire face à une amélioration. Ici, on fait la liste d'améliorations qui ne sont pas des limitations, mais plutôt des éléments qui seraient un pas de plus vers la bonne résolution de la LGP.

1. En premier, on pourrait tenter de coupler l'adaptation de maillage en fonction de l'interface à celle trouvée en fonction de l'erreur. Ainsi, on pourrait obtenir des maillages qui suivent bien l'interface et qui seraient raffinés ailleurs dans le domaine où les erreurs sont les plus élevées. Par exemple, dans le cas de la vague, on obtiendrait certainement un maillage plus raffiné sur la paroi de gauche avec ce genre d'algorithme que ce qu'on a présentement.
2. L'implémentation de la condition d'interface pour la température serait un bel ajout. Il serait intéressant de voir son effet sur la masse volumique calculée à l'intérieur de la poche.
3. L'implémentation de la tension de surface permettrait d'effectuer la simulation avec un maillage beaucoup plus fin, tout en balançant les instabilités de surface qui peuvent se déclencher en début de simulation et qui faisaient diverger la simulation.

4. En ce moment, le calcul diverge lorsque la vague se rapproche trop de la paroi. Il pourrait être intéressant de permettre au code de générer plus d'une interface dans le domaine, ce qui se passerait lorsque la vague frapperait la paroi. Une bulle d'air serait emprisonnée dans l'eau et la partie supérieure du domaine serait aussi de l'air. On aurait donc deux interfaces et cela permettrait de pousser ce cas plus loin.

## RÉFÉRENCES

- [1] H. Bogaert, S. Léonard, L. Brosset, and M.L. Kaminski. Sloshing and Scaling : Results from the Sloshel Project. In *Twentieth International Offshore and Polar Engineering Conference*, Beijing, China, 2010. ISOPE.
- [2] A. Hay, S. Etienne, and D. Pelletier. Adaptive simulation of gas-liquid impact waves. In *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, San Diego, 2016. AIAA. (AIAA 2016-1594)
- [3] P. M. Guilcher, N. Couty, L. Brosset, and D. Le Touzé. Simulations of breaking wave impacts on a rigid wall at two different scales with a two-phase fluid compressible SPH model. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 23 :241–253, 2013.
- [4] M. Ancellin, L. Brosset, and J.M. Ghidaglia. Influence of phase transition on sloshing impact pressures described by a generalized Bagnold’s model. In *Proceedings of 22nd International Offshore and Polar Engineering Conference, June*, volume 4, pages 17–22, 2012.
- [5] R. Loubère, J. P. Braeunig, and J.M. Ghidaglia. A totally Eulerian finite volume solver for multi-material fluid flows : Enhanced Natural Interface Positioning (ENIP). *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, 31(1) :1–11, 2012.
- [6] J. D. Anderson. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, New York, third edition, 2001.
- [7] F. S. Sherman. A Low-density Wind-tunnel Study of Shock-wave Structure and Relaxation Phenomena in Gases. Technical Report July 1955, National Advisory Comitee for Aeronautics, 1955.
- [8] H. P. Langtangen and G. K. Pedersen. *Scaling of Differential Equations*. Springer International Publishing, Cham, 2016.
- [9] É. Turgeon, D. Pelletier, and F. Ilinca. Compressible heat transfer computations by an adaptive finite element method. 41 :721–736, 2002.
- [10] F. Brezzi. On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising From Lagrangian Multipliers. (2) :129–151, 1974.
- [11] M. D. Gunzburger. *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows*. Academic Press, San Diego, 1st edition, 1989.
- [12] É. Muller. Application de modèles de turbulence à deux équations à la résolution éléments finis d’écoulements instationnaires. Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 2017.

- [13] A. Hay, S. Etienne, D. Pelletier, and A. Garon. hp-Adaptive time integration based on the BDF for viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 291 :151–176, jun 2015.
- [14] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerical Mathematics*, volume 37. Springer, 2007.
- [15] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7) :1331–1364, may 1992.
- [16] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7) :1365–1382, may 1992.
- [17] F. Lacombe. Vérification et validation d’une loi de paroi consistante du modèle de turbulence k- SST. Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 2017.
- [18] A. Hay, S. Etienne, and D. Pelletier. An ALE/FE formulation for high precision interface tracking in separated multiphase flows. In *22nd Computational Fluid Dynamics Conference*, Dallas, 2015. AIAA. (AIAA 2015-3421)
- [19] P.A. Sackinger, P.R. Schunk, and R.R. Rao. A Newton–Raphson Pseudo-Solid Domain Mapping Technique for Free and Moving Boundary Problems : A Finite Element Implementation. *Journal of Computational Physics*, 125(1) :83–103, apr 1996.
- [20] J. Donea, A. Huerta, J.P. Ponthot, and A. Rodriguez-Ferran. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods. In *Encyclopedia of Computational Mechanics*, pages 1–25. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, nov 2004.
- [21] A. Hay, K. R. Yu, S. Etienne, A. Garon, and D. Pelletier. High-order temporal accuracy for 3D finite-element ALE flow simulations. *Computers and Fluids*, 100 :204–217, 2014.
- [22] P. J. Roache. Code Verification by the Method of Manufactured Solutions. *Journal of Fluids Engineering*, 124(1) :4, 2002.
- [23] F. Ilinca, D. Pelletier, and F. Ilinca. A unified approach for adaptive solutions of compressible and incompressible flows. In *35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Aerospace Sciences Meetings, Reston, Virginia, jan 1997. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [24] P. Edmond. Analyse de sensibilités d’écoulements compressibles subsoniques. Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 2004.
- [25] R. A. Bagnold. Interim Report on Wave-Pressure Research). *Journal of the Institution of Civil Engineers*, 12(7) :202–226, jun 1939.

- [26] H. Mitsuyasu. Shock Pressure of Breaking Waves. *Coastal Engineering*, 10 :268–283, 1966.
- [27] Y. M. Scolan. Some aspects of the flip-through phenomenon : A numerical study based on the desingularized technique. *Journal of Fluids and Structures*, 26(6) :918–953, 2010.
- [28] C. W. Hirt and B. D. Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1) :201–225, 1981.
- [29] S. Skelboe. The control of order and steplength for backward differentiation methods. *BIT*, 17(1) :91–107, mar 1977.
- [30] L. Demkowicz, J. T. Oden, and W. Rachowicz. A new finite element method for solving compressible Navier-Stokes equations based on an operator splitting method and h-p adaptivity. 84 :275–326, 1990.
- [31] C. Johnson. A mixed finite element method for the Navier-Stokes equations. *RAIRO. Analyse numérique*, 12(4) :335–348, may 1978.
- [32] A. Hay, S. Etienne, A. Garon, and D. Pelletier. Time-integration for ALE simulations of Fluid–Structure Interaction problems : Stepsize and order selection based on the BDF. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 295 :172–195, oct 2015.
- [33] J. R. Holton *An introduction to dynamic meteorology*. Academic Press, New York, 2nd edition, 1979.
- [34] B. S. Massey. Measures in Science and Engineering :Their expression, relation and interpretation. page 216, 1986.
- [35] J. F. Héту. *Méthodes d’éléments finis adaptatives pour les écoulements visqueux incompressibles*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, 1991.
- [36] W. Lafeber, H. Bogaert, and L. Brosset. Elementary Loading Processes (ELP) Involved in Breaking Wave Impacts : Findings from the Sloshe! Project. In *The Twenty-second International Offshore and Polar Engineering Conference*, Rhodes, 2012. ISOPE.
- [37] F. Bassi and S. Rebay. Higher-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 131 :267–279, 1997.
- [38] F. Ilinca, D. Pelletier, and L. Ignat. Adaptive finite element solution of compressible turbulent flows. *AIAA Journal*, 36(12) :2187–2194, 1998.
- [39] F. Ilinca and D. Pelletier. A pressure based adaptive finite element algorithm for compressible viscous flows. *AIAA Journal*, 34(January), 1996.
- [40] J. D. Lambert. *Numerical methods for ordinary differential systems : the initial value problem*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.

- [41] D. Pelletier, É. Turgeon, and D. Tremblay. Verification and validation of impinging round jet simulations using an adaptive FEM. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 44(7) :737–763, 2004.
- [42] I. H. Shames *Mechanics of Fluids*. McGraw-Hill, New York, 2nd edition, 1962.
- [43] J. N. Reddy. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, Texas, 2nd edition, 1993.
- [44] F. M. White. *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 7 edition, 2011.
- [45] R.L. Panton. *Incompressible Flow*. Wiley-Interscience, Austin, 1984.
- [46] D. H. Peregrine. Water-Wave Impact on Walls. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 35(1) :23–43, 2003.
- [47] J. D. Anderson. *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*. McGraw-Hill, New York, third edition, 2003.